



De la Mecánica Clásica a la Geometría Simpléctica
(From Classic Mechanics to Symplectic Geometry)

Ignacio Ruiz García

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Fernando Etayo Gordejuela
Julio 2020

Agradecimientos

Este trabajo cierra cinco años de Matemáticas. En primer lugar, querría agradecer a Fernando su apoyo como director, permitiéndome desarrollar un tema que me resultaba de gran interés, y ayudándome y dando ideas siempre que ha sido necesario, y por siempre estar dispuesto a comentar cualquier cuestión que surgiese.

Me gustaría dar también las gracias a todos los profesores de Matemáticas que he tenido, tanto de las etapas de colegio e instituto, que me han ayudado a formarme y animado a continuar el camino que lleva hasta aquí, como de la Universidad de Cantabria, de los cuales he aprendido mucho y me llevo un grato recuerdo.

Gracias a todos mis amigos, que han hecho estos años mucho más llevaderos y entretenidos. Querría agradecer a Íñigo, Guille, Toraya, Antonio y Pablo, con los que sé que nuestra amistad no termina aquí. También a todo mi grupo de siempre, por seguir ahí todos estos años.

Finalmente, querría en especial dedicar y agradecer este trabajo a mi familia, como apoyo imprescindible desde siempre, y que han hecho que todo esto haya sido posible.

Resumen

La formulación matemática de la Mecánica Clásica constituye el origen histórico de la Geometría Simplética. Este trabajo pretende mostrar las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica y cómo éstas se formalizan matemáticamente por medio de variedades diferenciables, requiriendo del uso intensivo de los fibrados tangente y cotangente y de estructuras geométricas en ellos definidas.

La generalización de estas estructuras lleva a la Geometría Simplética, cuyos conceptos fundamentales se desarrollarán. Por último, se mostrará la relación entre las Geometrías Simplética, Riemanniana y Compleja, prestando especial atención a las variedades de Kähler.

Palabras clave: Mecánica Clásica, Geometría diferencial, Mecánica Lagrangiana, Mecánica Hamiltoniana, Geometría Simplética, variedades de Kähler.

Abstract

The mathematical formulation of Classical Mechanics constitutes the historical origin of Symplectic Geometry. This work will show the Lagrangian and Hamiltonian formulations of Mechanics, and how these can be formalized by means of differentiable manifolds, requiring of the extensive use of the tangent and cotangent bundles, as well as the geometric structures there defined.

The generalization of these structures serves as the foundations of Symplectic Geometry, whose fundamental concepts will be developed. Finally, the relationship between Symplectic, Riemannian and Complex Geometries will be shown, with particular attention being paid to Kähler manifolds.

Key words: Classical Mechanics, Differential Geometry, Lagrangian Mechanics, Hamiltonian Mechanics, Symplectic Geometry, Kähler manifolds.

Índice

| | |
|---|-----|
| Agradecimientos | I |
| Resumen/Abstract | III |
| Introducción | VII |
| Capítulo 1. Mecánica Clásica: Formalismos lagrangiano y hamiltoniano | 1 |
| 1.1. Introducción a la Mecánica Clásica. Principios de la dinámica. | 1 |
| 1.2. Formalismo Lagrangiano | 3 |
| 1.3. Principios variacionales en Mecánica | 7 |
| 1.4. Formalismo hamiltoniano | 9 |
| Capítulo 2. Mecánica sobre los fibrados tangente y cotangente | 11 |
| 2.1. Los fibrados tangente y cotangente. Formas canónicas | 11 |
| 2.1.1. Sistemas Hamiltonianos | 12 |
| 2.1.2. Sistemas Lagrangianos | 14 |
| 2.2. La transformada de Legendre | 18 |
| 2.3. Ejemplo: Péndulo Doble | 20 |
| Capítulo 3. Geometría y Variedades Simpléticas | 25 |
| 3.1. Álgebra Simplética | 25 |
| 3.1.1. Breves apuntes sobre volúmenes. Orientación * | 27 |
| 3.2. Geometría Simplética | 30 |
| 3.2.1. Breves apuntes sobre flujos* | 30 |
| 3.2.2. Conceptos básicos de Geometría Simplética | 32 |
| 3.3. Un par de resultados de Geometría Simplética | 35 |
| Capítulo 4. Relación entre Geometrías Simplética, Riemanniana y Compleja. Variedades de Kähler. | 37 |
| 4.1. Tripletes compatibles | 37 |
| 4.2. Fundamentos de variedades complejas | 41 |
| 4.3. Variedades de Kähler | 45 |
| 4.3.1. Ejemplos de variedades de Kähler | 47 |
| 4.3.2. Comentarios finales sobre variedades simpléticas y de Kähler. | 48 |
| Apéndice A. Breve introducción al Cálculo y Álgebra Exterior | 51 |
| A.1. Tensores y formas diferenciales. El álgebra exterior | 51 |
| A.2. Derivadas exteriores y de Lie | 55 |
| Apéndice B. Código en Wolfram Mathematica para la resolución y representación del péndulo doble | 59 |
| Apéndice. Bibliografía | 67 |
| Apéndice. Glosario | 69 |

Introducción

Las Matemáticas y la Mecánica, como disciplina de la Física, tienen una fructífera relación que se extiende a lo largo de numerosos siglos de la Historia¹. El origen de ésta, al menos en Occidente, se puede encontrar en la Antigüedad Clásica, concretamente en la Antigua Grecia, donde sus máximos exponentes fueron Aristóteles (384–322 a.C.) y Arquímedes (287–212 a.C.). Si bien la obra del primero es de un carácter más descriptivo, y hasta cierto punto metafísico, es el segundo quien realiza mayores contribuciones duraderas en el tiempo, como el estudio de palancas, Hidrodinámica y algunos de los primeros estudios cuantitativos de Dinámica y Equilibrio. Aparte de sus disquisiciones físicas, Arquímedes realizó importantes aportaciones en el estudio de la Geometría, como el cálculo de volúmenes de distintos cuerpos geométricos, y las áreas encerradas por curvas. Suya es además la primera definición (relativamente) formal de infinitesimales. Si bien otros autores como Herón de Alejandría (10–70 d.C.) o Ptolomeo (100–170 d.C.) contribuyeron a la Matemática y Física de la época, fundamentalmente no se produce ninguna “revolución conceptual”.

Habrá que esperar hasta la Edad Media, para que distintos autores del Mundo Islámico, como Abu Rayhan al-Biruni (973–1050), Avicena (980–1037), Avempace (1085–1138) o Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi (1080–1164), den un nuevo impulso a la Mecánica, revisitando e introduciendo nuevos términos como *inercia*, *cantidad de movimiento* o *energía potencial*. Si bien paralelamente a este desarrollo se ubica el trabajo de distintos autores de la Europa Cristiana como Jordanus Nemorarius (s. XIII) o Jean Buridan (1301–1362), no será hasta los siglos XVI y XVII, con la Revolución Científica en Europa, que verdaderamente se produce un importante impulso en la concepción de la Mecánica como una ciencia experimental y matematizable, en la que las leyes que rigen el comportamiento de los cuerpos pueden ser descritas por expresiones matemáticas más o menos simples, y que dan cuenta de las fuerzas que interaccionan con estos.

Aparecen así figuras como las de Nicolás Copérnico (1473–1543) (que reintroduce el Heliocentrismo en Europa), Galileo Galilei (1564–1642) (que sienta en la observación, experimentación y racionalismo las bases del Método Científico, estudiando además, de manera matemática, distintos tipos de movimientos y realizando observaciones astronómicas que sirven de apoyo al Heliocentrismo) o Johannes Kepler (1571–1630) (que formula sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas, además de realizar importantes contribuciones a las Matemáticas). Destaca especialmente la figura de Isaac Newton (1643–1727), que aparte de obtener importantes resultados en Óptica y obtener importantes avances en Cálculo Infinitesimal (comenzando de paso una controversia con Leibniz), revolucionó la Mecánica al enunciar la Ley de Gravitación Universal y sus Tres Leyes del Movimiento (si bien estas ya se habían formulado en gran medida anteriormente). En su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton hace importantes derivaciones de carácter geométrico en su afán por obtener las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos.

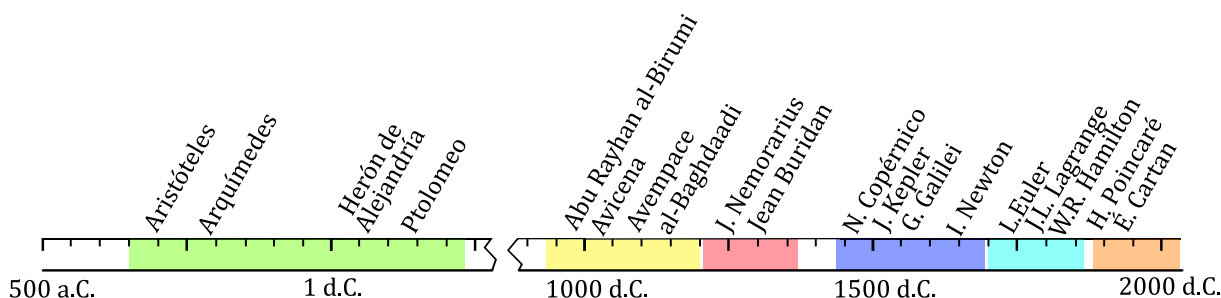


FIGURA 1. Línea temporal en la que se ubican las principales figuras nombradas en esta introducción.

Una nueva “revolución”, de mayor interés de para este trabajo, viene en los siglos XVIII y XIX, inicialmente de mano de la escuela matemática francesa. Trabajando en el problema de la *tautócrona* (curva tal

¹Para más información acerca del desarrollo histórico de la Mecánica y la Geometría asociada, se remite a [León, 2017] y el *Museum* e Introducción de [Abraham, 1977].

que dada una rampa con su forma, todas las masas tardasen el mismo tiempo en bajarla, independientemente de su punto inicial), en la década de 1750 Leonard Euler (1707-1783) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) desarrollan las conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange* (ver Secciones 1.2 y 1.3 de este trabajo). Estas, obtenidas asumiendo el filosófico *Principio de Mínima Acción*, que indica que la trayectoria que sigue un sistema es aquella que minimiza una cierta cantidad denominada *acción*, pueden interpretarse como una reescritura de las ecuaciones de Newton y resultan en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden a resolver. La novedad de estas es que no requieren de un estudio vectorial del sistema, tratándose de ecuaciones generales a resolver una vez identificada la conocida como *función lagrangiana* L , que se puede interpretar como la diferencia de la energía cinética T con la potencial V , dada en función de una serie de coordenadas $\{q_\alpha\}_\alpha$ que describen el sistema:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Posteriormente, en 1833 el célebre matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) (descubridor también del los cuaterniones) reescribió la Mecánica Clásica en una formulación análoga a la lagrangiana, haciendo uso de la *función hamiltoniana* H , que se puede identificar con la energía total del sistema. Mediante este enfoque, la evolución del sistema queda descrito por el doble de ecuaciones diferenciales que en la formulación lagrangiana, pero en compensación, estas son de primer orden:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

donde $\{p_\alpha\}_\alpha$ son unas variables “intermedias” conocidas como *momentos generalizados*.

Si bien en un principio el estudio de estas ecuaciones (tanto de Euler-Lagrange como de Hamilton) se llevó a cabo desde un punto de vista analítico, fueron (entre otros) Henri Poincaré (1854-1912), en su estudio cualitativo del problema de n -cuerpos, y Élie Cartan (1869-1951), introduciendo su Cálculo Exterior, quienes sentaron las bases de la “geometrización” de la Mecánica, pasando de trabajar en el espacio euclideo \mathbb{R}^n a una variedad diferencial cualquiera.

De esta forma, bajo el punto de vista hamiltoniano, la evolución de un sistema viene descrita por las curvas integrales de un campo vectorial X_H , que denominaremos *campo hamiltoniano*. La relación entre X_H y H vendrá dada, como veremos, por el producto interno

$$\iota_{X_H} \omega_0 = dH,$$

donde ω_0 es una cierta 2-forma, cuya expresión obtendremos. Esta, no por casualidad, cumplirá las siguientes propiedades:

- *Antisimétrica*, pues se trata de una 2-forma exterior.
- *No degenerada*, esto es, la aplicación bilineal que determina sobre cada punto es de rango máximo.
- *Cerrada*, pues $d\omega_0 = 0$, donde d es la diferencial exterior.

Como se podrá imaginar, gran cantidad de 2-formas cumplirán estas características, por lo que se acuñará para referirse a ellas el adjetivo *simplético*, del griego *sym-plektikos*, entrelazado, como analogía a *complejo* (del latín *complexus*, con el mismo significado), siendo usado por primera vez en 1939 por H. Weyl ([Weyl, 1939]).

Se introduce así la conocida como *Geometría Simplética*, en la que, de forma análoga a la Riemanniana, se estudian los pares (M, ω) formados por una variedad diferenciable M y una 2-forma simplética ω . Como se comprobará a lo largo del trabajo, las pocas (si bien importantes) diferencias entre el tensor métrico g de la Geometría Riemanniana y la 2-forma ω de la Simplética lleva a importantes implicaciones de carácter tanto algebraico como topológico.

La estructura que seguirá el trabajo es la siguiente:

- En primer lugar, el **Capítulo 1** dará un breve repaso a la Mecánica Clásica desde un punto de vista “físico”, introduciendo los conceptos y magnitudes necesarias. Se demostrarán las ecuaciones de Euler-Lagrange, tanto a partir de la Mecánica Newtoniana como de una versión “argumentada” del Cálculo Variacional (el cual no se ha tratado con todo el rigor posible debido tanto a restricciones de espacio como de no tratarse del objetivo del trabajo). A partir de la formulación lagrangiana se obtendrán las ecuaciones de Hamilton.

- En el **Capítulo 2** se realiza una “traducción” de ambos formalismos de \mathbb{R}^n a variedades diferenciables cualesquiera, haciéndose un uso extensivo de conceptos básicos de Cálculo Exterior. Se muestra además la equivalencia de ambas formulaciones, y el paso de una a otra por medio de la *Transformada de Legendre*.
- Por otra parte, el **Capítulo 3** introduce por fin la *Geometría Simpléctica*, comenzando por aquella en espacios vectoriales, y “elevándola” después a variedades diferenciables. Se demuestra el *Teorema de Darboux*, resultado central de la Geometría Simpléctica. Se hará uso de resultados acerca de *formas de volumen* y *flujos*, que si bien no forman parte del objeto de estudio del trabajo, se demuestran en aquellos casos breves.
- Por último en el **Capítulo 4** se muestra la relación entre la Geometría Simpléctica, Riemanniana y *Compleja* (de la cual se introducen conceptos básicos), prestando especial atención a las *Variedades de Kähler*, en las cuales existen las tres estructuras, siendo compatibles entre sí.

Tras la exposición teórica, al final de cada capítulo se incluye un ejemplo, con mayor o menor profundidad, en el que se aplican algunas de las ideas desarrolladas.

Este trabajo hace un importante uso de conceptos de Geometría Diferencial. Se supondrán conocidas las definiciones y resultados básicos de Variedades Diferenciables y Geometría Riemanniana que se pueden estudiar a nivel de grado, mientras que en el Apéndice A se incluye una recopilación de las definiciones y resultados (inmediatos) de Cálculo Exterior necesarios para el trabajo.

Tanto el estudio geométrico de la Mecánica como la Geometría Simpléctica tienen varias décadas de desarrollo a sus espaldas, por lo que ninguno de los resultados o desarrollos presentados en este trabajo es novedoso, realizándose una introducción a este campo. Sí son originales varias de las demostraciones a lo largo del texto, al no encontrarse desarrolladas en la bibliografía utilizada, como por ejemplo las referidas a volúmenes, gran parte de la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange en variedades diferenciables (Teorema 2.1.18) o la expresión en coordenadas de las métricas riemannianas asociadas a variedades de Kähler (Sección 4.3), además de todas las figuras y diagramas conmutativos presentes en el texto. La obtención de los campos vectoriales que describen la evolución del péndulo doble (Sección 2.3) también es novedosa, y no se ha encontrado en la bibliografía.

La bibliografía consultada para cada capítulo se detalla al comienzo de cada uno de estos. Se incluye un Glosario al final del documento en el que se indican las páginas en las que se introduce cada concepto.

Mecánica Clásica: Formalismos lagrangiano y hamiltoniano

Índice

| | | |
|------|--|---|
| 1.1. | Introducción a la Mecánica Clásica. Principios de la dinámica. | 1 |
| 1.2. | Formalismo Lagrangiano | 3 |
| 1.3. | Principios variacionales en Mecánica | 7 |
| 1.4. | Formalismo hamiltoniano | 9 |

En este capítulo realizaremos una introducción a la Mecánica Analítica desde el punto de la Física. En primer lugar se definen las magnitudes vectoriales y escalares y los principios básicos (equivalentes a las tres leyes de Newton) a partir de las cuales se desarrollará posteriormente el resto de la Mecánica. Posteriormente se describe en un nivel elemental el Formalismo Lagrangiano, tanto a partir del análisis vectorial y de los principios de la Mecánica como del cálculo de variaciones y el conocido como Principio de Hamilton. Por último se introduce el Formalismo Hamiltoniano, análogo al Lagrangiano, pero con una interpretación más intuitiva y “mejores” propiedades.

Estos conceptos servirán como motivación histórica para el desarrollo de la Geometría Simplética que se verá en capítulos posteriores. Se han seguido principalmente los Capítulos 2 y 6 de [Saletan, 1971], el Capítulo 3.8 de [Abraham, 1977] para parte de la Sección 1.3, así como notación y aclaraciones del Capítulo 15 de [Iñíguez, 1977].

1.1. Introducción a la Mecánica Clásica. Principios de la dinámica.

Consideremos el espacio físico como \mathbb{R}^3 comportándose como un espacio afín asociado a la norma euclídea $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Consideremos además un parámetro $t \in \mathbb{R}$ universal y absoluto para todo el espacio, al que denominaremos *tiempo*, en el sentido de que un suceso S_1 se considerará posterior a otro S_2 si los tiempos asociados cumplen $t_{S_2} > t_{S_1}$.

Dada una partícula, su posición \mathbf{x} será función del tiempo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, describiendo una curva o trayectoria de parámetro t . Se define a su vez la *velocidad* \mathbf{v} de la partícula como

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (1.1.1)$$

y la longitud s recorrida a lo largo de la trayectoria seguida por \mathbf{x} desde un punto $\mathbf{x}(t_0)$ como

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt \quad (1.1.2)$$

Aplicando la regla de la cadena a la ecuación 1.1.1, es inmediato que \mathbf{v} es tangente a la curva $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} \|\dot{\mathbf{x}}\| = \mathbf{t} \|\mathbf{v}\| \quad (1.1.3)$$

donde $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ es el vector tangente unitario. Análogamente definimos la *aceleración* \mathbf{a} como

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{t} \|\mathbf{v}\|) = \|\mathbf{v}\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} + \mathbf{t} \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\rho} \mathbf{n} + \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t} \quad (1.1.4)$$

donde hemos utilizado $\|\mathbf{v}\| = \frac{ds}{dt} \geq 0$ y $\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\rho} \mathbf{n}$, con $\rho = \|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\|^{-1}$ el radio de curvatura de la trayectoria y $\mathbf{n} = \rho \frac{d\mathbf{t}}{ds}$ el vector normal unitario. A la primera componente se le conocerá como *aceleración normal o centrípeta* y a la segunda como *aceleración tangencial*.

Consideremos ahora el movimiento de *partículas aisladas*, esto es, objetos lo suficientemente pequeños en comparación con las dimensiones del espacio a estudiar, de modo que se pueden considerar puntuales, y lo suficientemente alejados de otros cuerpos como para que el efecto de estos se pueda considerar despreciable. Este tratamiento idealizado, si bien no se da en la realidad, sirve como base para gran parte del desarrollo de la Mecánica Clásica a partir de los siguientes axiomas o principios:

Principio 1. : *Existen ciertos sistemas de referencia conocidos como inerciales, que cumplen las siguientes propiedades:*

- A) *Toda partícula aislada se encuentra en posición constante o se mueve en línea recta. La unidad de tiempo Δt puede entonces ser definida como el intervalo tal que $s(t + \Delta t) - s(t) = L$ para cierta longitud constante L . Por esta definición de t se sigue que tales partículas aisladas se mueven a velocidad \mathbf{v} constante.*

- B) Con la unidad de tiempo definida de este modo, toda partícula aislada de este sistema inercial se mueve también con velocidad constante. De este modo la definición de tiempo es independiente de la partícula tomada, salvo reescalamiento del tipo $\Delta t = C\Delta t'$ para cierto $C > 0$.

Este primer principio implica no solo la existencia de un sistema de referencia inercial, sino un conjunto no numerable de estos, al considerar cualquier otra referencia afín de \mathbb{R}^3 y velocidades $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ con las que estas evolucionen en el tiempo. Por otro lado, este es equivalente a la Primera Ley de Newton (todo cuerpo que no está sometido a fuerzas externas permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme).

Principio 2.

- A) **Conservación del momento:** Consideremos dos partículas 1 y 2 que pueden interaccionar entre sí, de modo que sus velocidades individuales pueden cambiar con el tiempo. Existen entonces las constantes $\mu_{12} > 0$ y $\mathbf{V}_{12} \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\mathbf{v}_1(t) + \mu_{12}\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{V}_{12} \quad \forall t \quad (1.1.5)$$

con μ_{12} independiente del sistema de referencia, lo que no tiene por qué ocurrir para \mathbf{V}_{12} . Si introducimos una tercer partícula, existirán además $\mu_{23}, \mu_{31} > 0$ (independientes del sistema de referencia) y $\mathbf{V}_{23}, \mathbf{V}_{31} \in \mathbb{R}^3$ constantes en t , de modo que a 1.1.5 se unen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2(t) + \mu_{23}\mathbf{v}_3(t) &= \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{v}_3(t) + \mu_{31}\mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{V}_{31} \end{aligned}, \quad \forall t \quad (1.1.6)$$

- B) **Existencia de masa:** Se cumple

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = 1 \quad (1.1.7)$$

A partir de las ecuaciones 1.1.5, 1.1.6 y 1.1.7 se tiene que existirán las constantes positivas $m_i > 0$, llamadas masas y los vectores constantes \mathbf{P}_{ij} tales que

$$\begin{cases} m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{P}_{12} \\ m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{P}_{23} \\ m_3\mathbf{v}_3 + m_1\mathbf{v}_1 &= \mathbf{P}_{31} \end{cases}, \quad (1.1.8)$$

simplemente multiplicando la ecuación asociada a ij por m_i y redefiniendo $m_j = \mu_{ij}m_i$ y $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{V}_{ij}m_i$. Notar que las masas $\{m_i\}_{i=1}^3$ no quedan definidas de manera única, pues multiplicando todas por la misma constante las ecuaciones siguen siendo válidas. Por último se define el momento de la partícula i como

$$\mathbf{p}_i := m_i\mathbf{v}_i = m_i\dot{\mathbf{x}}_i \quad (1.1.9)$$

y la fuerza \mathbf{F}_i actuando sobre ella como

$$\mathbf{F}_i := \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (1.1.10)$$

La ecuación 1.1.10 es conocida popularmente como *Segunda Ley de Newton*, pese a tratarse en realidad de la definición de fuerza. Si bien considerando m_i constante, se puede reformular en términos de la aceleración como $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}$, el hecho de trabajar con \mathbf{p} nos permite incluir casos de masas variantes en el tiempo y, como veremos, es más natural trabajar en términos de momentos que de velocidades.

Por último, derivando respecto a t una de las ecuaciones de 1.1.8 y teniendo en cuenta que \mathbf{P}_{ij} es constante, se llega a la *Tercera Ley de Newton*:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j = 0 \quad (1.1.11)$$

donde asumimos que la fuerza que experimenta la partícula i está causada por j y viceversa.

Dado ahora una trayectoria γ descrita por $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el *trabajo* W descrito por la fuerza \mathbf{F} a lo largo de γ como

$$W_{\mathbf{F}}(\gamma) := \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.1.12)$$

Es fácil ver que, si la masa m de una partícula es constante, aplicando esta definición:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{F}}(\gamma) &= \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{p} dt = \frac{1}{2m} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\|\mathbf{p}\|^2}{dt} dt \\ &= \frac{\|\mathbf{p}(t_1)\|^2}{2m} - \frac{\|\mathbf{p}(t_0)\|^2}{2m} \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Así, si definimos *energía cinética* como

$$T := \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 \quad (1.1.14)$$

se tiene de manera inmediata a partir de la ecuación 1.1.13 el conocido como *Teorema de las fuerzas vivas*:

$$T(t_1) = T(t_0) + W_{\mathbf{F}}(\gamma) \quad (1.1.15)$$

En general la expresión 1.1.15 no es demasiado útil si no conocemos la expresión explícita de γ . Un caso interesante y de gran importancia es en el que la fuerza \mathbf{F} es *conservativa*, esto es, el trabajo $W_{\mathbf{F}}(\gamma)$ depende únicamente de los extremos de la trayectoria. Bajo esta definición, dados γ_1 y γ_2 dos caminos con los mismos extremos, se tiene

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \iff \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (1.1.16)$$

Esto es, el trabajo realizado por este tipo de fuerzas a lo largo de todo camino cerrado es nulo. Aplicando ahora el Teorema de Stokes se puede pasar a una integral de superficie:

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1.17)$$

Por ser la ec. 1.1.17 cierta para todo camino cerrado $\partial\Sigma$, lo será para toda superficie Σ , y por lo tanto se llega a que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ es condición necesaria para que \mathbf{F} sea conservativa. Consideramos ahora que \mathbf{F} depende solo de la posición \mathbf{x} , y supongamos que para cierta función escalar $V(\mathbf{x})$ se cumple

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad (1.1.18)$$

Puesto que $\nabla \times (\nabla V) = 0$, se tiene que inmediatamente \mathbf{F} es conservativa. Llamaremos *energía potencial* a la función $V(\mathbf{x})$. El por qué de tomar este nombre y del signo negativo en la ecuación 1.1.18 se entiende al regresar a la ecuación 1.1.13 para \mathbf{F} conservativa:

$$W_{\mathbf{F}}(\gamma) = T_1 - T_0 = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \nabla V \cdot d\mathbf{x} = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x}_1) \quad (1.1.19)$$

De modo que definiendo la *energía (total) mecánica* de la partícula como $E = T + V$ se tiene que si \mathbf{F} es conservativa, la energía mecánica se conserva:

$$E = V + T = V_0 + T_0 = V_1 + T_1 = \text{cte.} \quad (1.1.20)$$

El hecho de que las magnitudes energéticas V , T y E sean escalares y que V esté unívocamente definida salvo constante aditiva puede ayudar en la resolución de problemas mecánicos, ya que en muchas ocasiones al intentar resolver la EDO $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ requiere conocer la expresión de \mathbf{F} , que puede ser complicada y depender de \mathbf{x} , \mathbf{v} o t .

Como último apunte de esta sección, indicar que se puede generalizar la discusión anterior a sistemas de N partículas:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \quad (1.1.21a)$$

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \text{cte. si todas las fuerzas son conservativas} \quad (1.1.21b)$$

1.2. Formalismo Lagrangiano

Como se puede intuir, la formulación de un sistema aumenta de dificultad conforme lo hace el número de partículas implicadas en este, así como las relaciones entre estas. A continuación se muestra el conocido como *Formalismo Lagrangiano*, que simplifica el punto de vista energético/vectorial introducido en la sección anterior y permite abordar sistemas de mayor complejidad. En esta sección abordaremos la derivación del mismo a partir de la Dinámica Clásica, mientras que en la Sección 1.3 mostraremos una derivación equivalente a partir del Cálculo Variacional.

Partamos de un sistema general de N partículas con coordenadas $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, esto es, $3N$ variables en un principio independientes. Supongamos además que existen una serie de *restricciones* que deben cumplir las coordenadas del sistema, expresadas mediante las siguientes $K < 3N$ ecuaciones:

$$f_I(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0, \quad \text{para } I \in \{1, \dots, K\} \quad (1.2.1)$$

donde $f_I \in \mathcal{C}^1$. Dichas restricciones, que dependen únicamente de la posición de las partículas y del tiempo, se denominan *holomónicas*¹.

Consideremos en primer lugar el movimiento de una partícula, restringida a la superficie dada por la ecuación $f(\mathbf{x}, t) = 0$. Siguiendo la ecuación 1.1.10, tendremos que la partícula seguirá la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} \quad (1.2.2)$$

donde se ha descompuesto la fuerza que afecta a la partícula en una componente \mathbf{F} tangencial a la superficie, que es la fuerza “externa” que rige el movimiento de la partícula *dentro* de la superficie, y otra componente \mathbf{N} normal a esta, que “obliga” a la partícula a permanecer en la superficie. Puesto que ∇f es también normal a la superficie, podremos escribir la ecuación 1.2.2 como

$$\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F} = \lambda(t) \nabla f(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.3)$$

para cierta función escalar λ que puede depender del tiempo. Es fácil ver que dado τ cualquier vector tangente a la superficie en el punto dado,

$$(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}) \cdot \tau = 0 \quad (1.2.4)$$

Por otro lado, suponiendo que \mathbf{F} es conservativa (esto es, existe $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$) y que la masa m es constante, tendremos a partir de la ecuación 1.2.3:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) = \frac{1}{m} \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda(t) \nabla f(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (1.2.5)$$

Aplicando simplemente la regla de la cadena y que en las condiciones en las que estamos $f(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, tendremos

$$\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \text{y} \quad \frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1.2.6)$$

que junto a la ecuación 1.2.5 nos permite obtener la variación de la energía mecánica total en el tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (T + V) = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda(t) \nabla f(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial t} = -\lambda(t) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.2.7)$$

donde hemos supuesto que la función potencial V no depende explícitamente del tiempo. El resultado es fácilmente generalizable a N partículas (denotadas por el subíndice i) y K restricciones (subíndice I):

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{I=1}^K \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial t} \quad (1.2.8a)$$

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_I \cdot \tau_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \tau_i = 0 \quad (1.2.8b)$$

Tomémonos una breve pausa para reconsiderar una manera distinta de resolver el problema. En vez de mantenernos en las $3N$ componentes cartesianas de las posiciones $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, podemos tomar otras $3N$ variables $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^{3N}$, llamadas *coordenadas generalizadas* (como pueden ser ángulos, distancias respecto a puntos, etc.) tal que se puedan expresar en función de \mathbf{x}_i y viceversa:

$$q_\alpha = q_\alpha(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \Leftrightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad (1.2.9)$$

Supondremos q_α

mathscr{C}^2 para todo α . Respecto a las K restricciones, podemos definir K de las q_α de modo que dependan directamente de dichas funciones $\{f_I\}_{I=1}^K$:

$$q_{n+I} = R_I(f_1, \dots, f_K) = R_I(0, \dots, 0), \quad \text{con } I \in 1, \dots, K \quad (1.2.10)$$

de modo que una vez definidas a partir de las R_I , las q_{n+I} quedarán fijas, independientes del tiempo, con $n = 3N - K$. Si además estos q_{n+I} son independientes, el jacobiano de R_I será distinto de 0 y por lo tanto se podrá invertir la ecuación 1.2.10, de modo que los f_I dependen únicamente de $\{q_\alpha\}_{\alpha=n+1}^{n+K}$:

$$f_I = f_I(q_{n+1}, \dots, q_{n+K}), \quad \forall I \in 1, \dots, K \quad (1.2.11)$$

Tendremos por lo tanto n *grados de libertad*, variables cuya evolución temporal trataremos de obtener. A continuación, veremos cómo somos capaces de deshacernos de las funciones f_I y λ_I y los vectores

¹Se pueden utilizar otros tipos de restricciones más generales que tengan en cuenta las sucesivas derivadas de \mathbf{x}_i , así como la posibilidad de tratarse de desigualdades, pero en este trabajo nos limitaremos al caso holomónico.

tangentes τ_i en las ecuaciones 1.2.8a y 1.2.8b.

Definamos los siguientes vectores:

$$\tau_i := \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_{\alpha}^i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.2.12)$$

para $\{\epsilon_{\alpha}^i\}_{\alpha=1}^n \subset \mathbb{R}$ arbitrarios. Es inmediato que son perpendiculares a $\nabla_i f_I$:

$$\nabla_i f_I \cdot \tau_i = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \epsilon_{\alpha}^i \frac{\partial f_I}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_{\alpha}^i \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad (1.2.13)$$

ya que como se recoge en la ecuación 1.2.11, los f_I no dependen de las n primeras q_{α} . Notar que estamos derivando respecto a las componentes individuales $\{x_i\}_{i=1}^{3N}$, no respecto a los vectores \mathbf{x}_i .

Sustituyendo ahora estos τ_i en la ecuación 1.2.8b, tendremos:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_{\alpha}^i (\dot{\mathbf{p}}_i - F_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (1.2.14)$$

Puesto que esto ocurre para todo $\{\epsilon_{\alpha}^i\}_{\alpha=1}^n \subset \mathbb{R}$, se tendrá:

$$(\dot{\mathbf{p}}_i - F_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.15)$$

Además, aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.2.16)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t \partial q_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.2.17)$$

donde hemos utilizado que $\frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} = 0$. Aplicaremos esto ahora para ver que

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) - \mathbf{p}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.2.18)$$

donde hemos utilizado $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y $T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. Recuperando la ecuación 1.2.15 se tendrá:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (1.2.19)$$

Suponiendo \mathbf{F} conservativo y aplicando la regla de la cadena, es fácil ver que

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_{\alpha}} = - \frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.2.20)$$

De modo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (1.2.21)$$

Usaremos ahora que el potencial V depende únicamente de $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ (y por lo tanto $\{q_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$), no de sus derivadas, por lo que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 0$. Incluyendo la derivada temporal de este sumando nulo en la ecuación 1.2.21 y definiendo la *función lagrangiana* o *lagrangiano* como

$$L := T - V \quad (1.2.22)$$

se llega a las conocidas como *Ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.23)$$

Se obtienen así un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto al tiempo t que describen la evolución de las coordenadas generalizadas $\{q_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$. Resolviéndolas se obtendrían las trayectorias $\{q_{\alpha}(t)\}_{\alpha=1}^n$, a partir de las cuales podríamos recuperar $\{\mathbf{x}_i(t)\}_{i=1}^N$ según 1.2.9. A continuación se muestran un par de resultados interesantes respecto a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema 1.2.1. Sean $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ y $\{q'_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ dos conjuntos de coordenadas generalizadas relacionadas entre sí mediante

$$q'_\alpha = q'_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.24)$$

Siendo los lagrangianos $T - V$ en cada conjunto de coordenadas $L(\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t) = L'(\{q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t)$. Si L satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, entonces L' lo hace en términos de $\{q'_\alpha\}_{\alpha=1}^n$. Esto es, cualquier sistema de coordenadas generalizadas es igual de “bueno” que otro.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, notemos que, aplicando la regla de la cadena, las derivadas en $\{q'_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ equivalen a:

$$\frac{\partial}{\partial q'_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial q_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \quad (1.2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}'_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial q_\beta}{\partial \dot{q}'_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \quad (1.2.26)$$

ya que la relación entre coordenadas no depende de las derivadas de estas. Por otro lado, notar que

$$\dot{q}'_\alpha = \frac{dq'_\alpha}{dt} = \frac{\partial q'_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}'_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_\beta} \quad (1.2.27)$$

Teniendo en cuenta esto y que $L = L'$ (respecto las coordenadas pertinentes), tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q'_\alpha} \right) L' &= \left[\sum_{\beta=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) - \frac{\partial q_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \right] L \\ &= \left[\sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} + \frac{\partial q_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial q_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \right] L \\ &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial q_\beta}{\partial q'_\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q'_\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) L = 0 \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

al cumplirse las ecuaciones de Euler-Lagrange para todo q_β . \square

Teorema 1.2.2. Sean dos lagrangianos L y L' definidos sobre las mismas coordenadas generalizadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$. Entonces L y L' determinan las mismas ecuaciones del movimiento si y solo si L y L' difieren por la derivada temporal (total) de una función de la forma $\Phi(\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t)$.

DEMOSTRACIÓN.

\Rightarrow) En primer lugar, definamos la siguiente función a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre un conjunto de coordenadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$:

$$\Lambda_\alpha := \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (1.2.29)$$

L y L' determinarán las mismas constantes del movimiento si $\Lambda_\alpha = \Lambda'_\alpha$ para todo $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. Definiendo $\psi = L - L'$, tendremos que, aplicando la regla de la cadena:

$$0 = \Lambda_\alpha - \Lambda'_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\beta \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \quad (1.2.30)$$

Puesto que L y L' no dependen de $\{\ddot{q}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, tampoco lo hará $\Lambda_\alpha = \Lambda'_\alpha$, de donde deduce:

$$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.31)$$

De esta forma, ψ debe seguir la siguiente expresión:

$$\psi = \sum_{\gamma=1}^n \dot{q}_\gamma F_\gamma(\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t) + F_0(\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t) \quad (1.2.32)$$

con las $\{F_i\}_{i=0}^n$ funciones dependientes únicamente de $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ y t . A partir de esto, regresando a la ecuación 1.2.30,

$$0 = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial F_0}{\partial q_\alpha} \quad (1.2.33)$$

Puesto que esto se debe cumplir para todo $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, y ser independiente de la elección de las coordenadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, necesitaremos que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial F_\beta}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial F_0}{\partial q_\alpha}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.34)$$

La única manera de que estos términos cruzados se anulen es que exista una función $\Phi(\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t)$ tal que

$$F_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad F_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.35)$$

De esta manera, tendremos

$$L - L' = \psi = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.2.36)$$

\Leftarrow) Supongamos ahora la existencia de una función $\Phi(\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t)$ tal que $L' = L + \frac{d}{dt}\Phi$. Tendremos ahora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \right) \quad (1.2.37)$$

Desarrollando la derivada total de Φ respecto a t :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.2.38)$$

se comprueba que el segundo paréntesis del término derecho de la ecuación 1.2.37 se anula:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d\Phi}{dt} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial q_\alpha} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial t} = 0, \quad (1.2.39)$$

concluyéndose que L y L' generan las mismas ecuaciones del movimiento. \square

1.3. Principios variacionales en Mecánica

En la sección anterior se derivaron las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2.23) directamente a partir de los Principios 1 y 2 de la Mecánica Clásica, que como vimos equivalen a las tres Leyes de Newton, y las fuerzas que aparecían al considerar restricciones. En esta sección expondremos un método análogo, que históricamente se incluye dentro del *Cálculo Variacional*. En primer lugar establezcamos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.1. Dado un sistema físico descrito en las coordenadas generalizadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, conoceremos como espacio de configuraciones al conjunto $Q = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \text{ admisibles del sistema}\}$. Denotaremos por q a los puntos genéricos de Q . Dados $q^1, q^2 \in Q$ y $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, se define el espacio de caminos de q^1 a q^2 como $\Omega(q^1, q^2, [t_1, t_2]) = \{c : [t_1, t_2] \rightarrow Q \text{ con } c \text{ curva } \mathcal{C}^2 \text{ tal que } c(t_1) = q^1, c(t_2) = q^2\}$.

Definición 1.3.2. Dado un lagrangiano L definido sobre nuestro sistema físico, denominamos acción al funcional

$$\begin{aligned} S : \Omega(q^1, q^2, [t_1, t_2]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto S(c) = \int_{t_1}^{t_2} L(c(t), c'(t), t) dt \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

donde identificamos $c(t) = q(t)$, $c'(t) = \dot{q}(t)$.

A partir de estos podemos introducir el siguiente principio, a partir del cual obtendremos las ecuaciones del movimiento.

Principio 3 (Variacional de Hamilton). Dado un lagrangiano L definido sobre un sistema físico, la trayectoria $c_0 : [t_1, t_2] \rightarrow Q$ con $c_0(t_1) = q^1$ y $c_0(t_2) = q^2$ seguida por el sistema constituirá un extremo de S .

Teorema 1.3.3. El Principio Variacional de Hamilton implica que c_0 obedece las ecuaciones de Euler-Lagrange.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, consideremos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in U$ tal que podamos tomar una familia de curvas $\Omega_U = \{c_\varepsilon\}_{\varepsilon \in U} \subseteq \Omega(q^1, q^2, [t_1, t_2])$, llamadas ε -familia, tales que el movimiento que seguirá la partícula lo identificamos por c_0 se encuentre en Ω_U (esto es, para $\varepsilon = 0$). Se pide además que $c_\varepsilon(t) = q(t, \varepsilon)$ sea diferenciable respecto a ε a t constante. Exigiremos además que para todo $\varepsilon \in U$ se tenga

$$q(t_1, \varepsilon) = q(t_1, 0) = q(t_1) = q^1 \quad (1.3.2a)$$

$$q(t_2, \varepsilon) = q(t_2, 0) = q(t_2) = q^2 \quad (1.3.2b)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}(t_1, \varepsilon) = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon}(t_2, \varepsilon) = 0 \quad (1.3.2c)$$

Tendremos así que el lagrangiano dependerá únicamente de t y ε , de modo que

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t, \varepsilon), \dot{q}(t, \varepsilon), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \varepsilon) dt \quad (1.3.3)$$

El Principio Variacional implicará entonces que para toda ε -familia Ω_U , $S(0)$ es extremo:

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} L(t, \varepsilon) dt \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.3.4)$$

Al ser L continua (V es diferenciable y $T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ con $\mathbf{p} = m\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^2$) y estar integrando sobre un compacto (de extremos fijos), podemos diferenciar bajo el símbolo integral:

$$0 = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(t, \varepsilon) dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (1.3.5)$$

Ahora, es fácil ver que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \quad (1.3.6)$$

Por lo que aplicando la regla de la cadena sobre $\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \varepsilon} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (1.3.7)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.3.5 podemos separar en dos integrales:

$$0 = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \right) dt \right] \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (1.3.8)$$

Por la condición 1.3.2c, el siguiente grupo de integrales se anula:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} \Big|_{t_1}^{t_2} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.3.9)$$

De modo que llegamos a

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} dt \Big|_{\varepsilon=0} \right] = 0 \quad (1.3.10)$$

Démonos cuenta ahora de que, por ser esto cierto para cualquier ε -familia Ω_U bajo las condiciones requeridas, las funciones $\frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon}$ son funciones arbitrarias (y por lo tanto lo es también cada uno de los sumandos de la ecuación 1.3.10), por lo que cada sumando asociado a α debe ser nulo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon} dt \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.3.11)$$

Usemos ahora que dada una función $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda función $g \in \mathcal{C}^1$ con $g(a) = g(b) = 0$ si y solo si f es idénticamente nula. Por la propiedad 1.3.2c de $\frac{\partial q_\alpha}{\partial \varepsilon}$, se llega finalmente a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.3.12)$$

□

Un tratamiento más riguroso de la prueba de este teorema requeriría probar que $\Omega(q^1, q^2, [t_1, t_2])$ es una variedad diferenciable de dimensión infinita y definir el espacio tangente de esta para cada curva $c \in \Omega(q^1, q^2, [t_1, t_2])$. Puesto que el objetivo de este trabajo no es realizar un estudio del cálculo de variaciones, se ha decidido mostrar en su defecto un esbozo o justificación del resultado.

1.4. Formalismo hamiltoniano

Como se mostró en la Sección 1.2, en un sistema con n coordenadas generalizadas (escogidas de modo que se eliminan las restricciones de este), la formulación lagrangiana desemboca en n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Por el contrario, la formulación hamiltoniana que se ve en esta sección lleva a $2n$ EDOs de primer orden. Si bien ambas formulaciones son equivalentes y llevan a las mismas ecuaciones de evolución temporal, esta última es más intuitiva y simétrica.

En primer lugar, partimos de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2.23), dependientes de $\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$. Definimos, a partir del lagrangiano L y las coordenadas generalizadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ las variables conocidas como *momento generalizado*:

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.4.1)$$

y a partir de este, el *hamiltoniano* o *función hamiltoniana*:

$$H := \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha (\{q_\alpha, p_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t) p_\alpha - L(\{q_\alpha, p_\alpha\}_{\alpha=1}^n, t) \quad (1.4.2)$$

donde $\{q_\alpha, p_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ (conocidas como *variables canónicas*) y t funcionan como parámetros, mientras que las derivadas de estos dependen de ellos.

Teorema 1.4.1. *La evolución temporal de $\{q_\alpha, p_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ sigue las conocidas como ecuaciones canónicas de Hamilton:*

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1.4.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la regla de la cadena, la definición de p_α según 1.4.1 y las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2.23):

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^n \dot{q}_\beta p_\beta - L \right) = \dot{q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^n \left(p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \right) = \dot{q}_\alpha \quad (1.4.4)$$

donde debemos tener en cuenta que los q_α y los p_α son variables independientes y que por tanto $\frac{\partial q_\beta}{\partial q_\alpha} = \delta_{\alpha\beta}$. Por otra parte, de modo análogo:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^n \dot{q}_\beta p_\beta - L \right) = \sum_{\beta=1}^n \left(p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad (1.4.5)$$

□

Veamos ahora un resultado inmediato sobre el hamiltoniano:

Corolario 1.4.2. *Consideremos un lagrangiano arbitrario, definido como $L = T - V$, con el potencial $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ únicamente dependiente de $\{q_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ y la energía cinética T describiendo una expresión cuadrática homogénea en $\{\dot{q}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, esto es, existen $\{c_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ tal que*

$$T = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \dot{q}_\alpha^2$$

Se tiene entonces que el hamiltoniano se asocia entonces a la energía mecánica total E .

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la definición de hamiltoniano y de lagrangiano junto a la ecuación 1.4.1:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha p_\alpha - L = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (T - V) p_\alpha - (T - V) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} p_\alpha - T + V \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^n c_\beta \dot{q}_\beta^2 \right) p_\alpha - T + V = 2 \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \dot{q}_\alpha^2 - T + V = 2T - T + V = T + V = E \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Esto significa que en estas condiciones el hamiltoniano H no es más que la energía total expresada en $\{q_\alpha, p_\alpha\}_{\alpha=1}^n$. \square

Un resultado inmediato es que, bajo las condiciones del Corolario 1.4.2, si el hamiltoniano H asociado a un sistema no depende explícitamente del tiempo, la energía total E se conserva. Es fácil demostrar que lo mismo ocurre en el caso de un lagrangiano independiente del tiempo.

Cerraremos este capítulo con un ejemplo que muestra el interesante campo que se abre al considerar la Mecánica Analítica en el contexto de la Geometría Riemanniana.

Ejemplo 1.4.3. Consideremos (Q, g) una variedad (pseudo) riemanniana, y un Lagrangiano L dado por

$$\begin{aligned} L : TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Se tiene entonces que $c_0(t)$ sigue las ecuaciones del movimiento asociadas a L si y solo si $c_0(t)$ es geodésica (asociada a la conexión de Levi-Civita).

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, consideremos (q^1, \dots, q^n) las coordenadas locales de Q , de modo que dado un vector $v \in T_p Q$, para cierto $p \in Q$, su expresión en coordenadas será $v = v^1 \dot{q}^1 + \dots + v^n \dot{q}^n$. Así, la expresión en coordenadas del lagrangiano será

$$L(v) = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j, \quad (1.4.8)$$

aplicando el convenio de sumación de Einstein. Para obtener las ecuaciones del movimiento, bastará aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (eq. 1.2.23):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= g_{ij} \dot{q}^j \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k \\ \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k \quad (1.4.9)$$

Multiplicando a ambos lados por g^{il} (matriz inversa de g_{il} , de modo que $g^{il} g_{lj} = \delta_j^l$), se tiene

$$\ddot{q}^l = g^{li} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k = - \underbrace{\frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right)}_{\Gamma_{jk}^l} \dot{q}^j \dot{q}^k, \quad (1.4.10)$$

donde hemos usado la evidente simetría $\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k$, al estar sumando sobre todos los j y k . Aparecen así de manera natural los símbolos de Christoffel (coeficientes de la conexión de Levi-Civita), de modo que

$$\ddot{q}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{q}^j \dot{q}^k = 0, \quad (1.4.11)$$

concluyéndose así que $c_0(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange si y solo si es geodésica. \square

Este ejemplo se puede entender como una generalización de la Segunda Ley de Newton, ya que considerando una partícula de masa m moviéndose libre de potenciales o fuerzas externas ($V = 0$), el lagrangiano asociado tiene la forma $L = T - V = \frac{1}{2} m v^2$. Es inmediato que el resultado no varía si se incluye una constante $m \neq 0$ en L . En el caso de tenerse $Q = \mathbb{R}^n$, como $g_{ij} = \delta_{ij}$, todos los símbolos de Christoffel son nulos ($\Gamma_{ij}^l = 0$), teniéndose por tanto $\ddot{q}^l = 0$ para todo $l \in \{1, \dots, n\}$, como predice la Segunda Ley de Newton en ausencia de fuerzas externas.

El movimiento geodésico es de gran importancia en el contexto de Relatividad General, describiendo la trayectoria de partículas libres de fuerzas no gravitatorias (manifestándose estas últimas por medio de la curvatura de la variedad que describe el espacio-tiempo del problema, de modo que están incluidas en el tensor métrico g).

Se ha mostrado únicamente un resultado básico de la relación entre la Mecánica Analítica y la Geometría Riemanniana. Por ejemplo, se puede generalizar (ver Capítulo 3.7 de [Abraham, 1977]) a lagrangianos $\frac{1}{2} m v^2 - V$ que incluyan un potencial $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ acotado, siendo posible construir una métrica g_e , denominada métrica de Jacobi, tal que las geodésicas de esta se correspondan con las soluciones de las ec. de Euler-Lagrange para L .

Mecánica sobre los fibrados tangente y cotangente

Índice

| | |
|--|-----------|
| 2.1. Los fibrados tangente y cotangente. Formas canónicas | 11 |
| 2.1.1. Sistemas Hamiltonianos | 12 |
| 2.1.2. Sistemas Lagrangianos | 14 |
| 2.2. La transformada de Legendre | 18 |
| 2.3. Ejemplo: Péndulo Doble | 20 |

Antes de comenzar el capítulo, introduzcamos el siguiente ejemplo. Supongamos una partícula en \mathbb{R}^3 asociada a un hamiltoniano H . Recuperemos las ecuaciones canónicas de Hamilton (ecs. 1.4.3) para dicha partícula:

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

Basándonos en la apreciable simetría de estas, podríamos definir las siguientes variables:

$$\begin{cases} \xi_\alpha := q_\alpha & \text{para } \alpha \in \{1, 2, 3\} \\ \xi_\alpha := p_{\alpha-3} & \text{para } \alpha \in \{4, 5, 6\} \end{cases}, \quad (2.0.1)$$

con $\xi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, y la siguiente matriz:

$$J := \begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_3 \\ -\text{Id}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.0.2)$$

Podremos así considerar H como función de $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^6$ y reescribir las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{\xi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \iff \dot{\xi} = J \nabla H \quad (2.0.3)$$

tanto en notación de coordenadas como matricial. Dado un hamiltoniano H , definimos el campo vectorial $X_H := J \nabla H$. Es inmediato entonces por definición que $\xi(t)$ satisface las ecuaciones de Hamilton si y solo si es curva integral de X_H , esto es, $\dot{\xi}(t) = X_H(\xi(t))$. El problema se reduciría entonces a obtener las curvas integrales de X_H (que denominaremos *campo hamiltoniano*).

Sin embargo, en general el espacio de configuraciones de un sistema físico no es el espacio euclideo \mathbb{R}^n , sino una variedad diferenciable cualquiera M . Como veremos en este capítulo, los espacios naturales para la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana son respectivamente los fibrados tangente y cotangente, TM y T^*M .

Las variedades diferenciables que utilizemos en adelante se considerará que cumplen los axiomas T_2 (*Hausdorff*) y el *Segundo Axioma de Numerabilidad*. A lo largo de este y del siguiente capítulo se utilizarán diversas herramientas de Cálculo y Álgebra Exterior, que vienen recogidos en el Apéndice A.

Respecto a la “traducción” a los fibrados tangente y cotangente de la Mecánica Analítica, se han seguido los Capítulos 3.2, 3.3, 3.5 y 3.6 de [Abraham, 1977].

2.1. Los fibrados tangente y cotangente. Formas canónicas

En esta sección veremos cómo se pueden entender los formalismos Hamiltoniano y Lagrangiano a partir de la Geometría Diferencial definida sobre los espacios tangente y cotangente de una variedad. Para ello, recordemos las siguientes nociones básicas al respecto.

Definición 2.1.1. Sea M una variedad diferenciable asociada a un atlas maximal \mathcal{A} . Definimos el espacio tangente de M en el punto $p \in M$ al conjunto $T_p M : \{[c]_p : c \text{ curva en } M \text{ que pasa por } p\}$ bajo la relación de equivalencia $c \sim_p c'$ si tienen el mismo vector tangente en p .

Se tiene que $T_p M$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial real de dimensión n que, dada una carta (x, U) en un entorno abierto U de p , tiene como base

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$$

donde $x^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de x . Denotaremos por T_p^*M (espacio cotangente de M en p) al espacio vectorial dual de T_pM , que tiene como base dual $\mathcal{B}_p^* = \left\{ (dx^i)_p \right\}_{i=1}^n$.

Definición 2.1.2. Bajo las hipótesis anteriores, denominamos, respectivamente fibrado tangente de M y fibrado cotangente de M a las siguientes uniones disjuntas:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM, \quad T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M \quad (2.1.1)$$

Ambas tienen estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, e independiente de si lo es M , son siempre orientables¹. Denominamos vectores tangentes a M a los elementos de TM y covectores a los de T^*M . Definimos las proyecciones naturales $\pi_M : TM \rightarrow M$ y $\pi_M^* : T^*M \rightarrow M$, que llevan a cada (co)vector al punto de M del que son (co)tangentes. Se dice sección a las aplicaciones $\sigma : M \rightarrow TM$ tales que $\pi_M \circ \sigma = \text{Id}_M$ (análogamente para T^*M). Los conjuntos de las secciones diferenciables de TM y T^*M se denominan respectivamente campos vectoriales sobre M , $\mathfrak{X}(M)$, y 1-formas diferenciales, $\Omega^1(M)$.

Definición 2.1.3. Sea Q una variedad n dimensional y $M = T^*Q$ su fibrado cotangente. Sea una carta de Q , $(q = (q^1, \dots, q^n), U)$ con $q^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sus funciones coordenadas. Puesto que para cualquier $a \in U$, los diferenciales $\{(dq^i)_a\}_{i=1}^n$ forman una base de T_a^*M , dado $p \in T_a^*M$, se tendrá (aplicando el convenio de sumación de Einstein) $p = p_i(dq^i)_a$ para ciertos $\{p_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$. Se induce de forma natural la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} T^*U &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (q, p) &\mapsto (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

La carta coordenada $((q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n), T^*U)$ de T^*Q se denomina carta canónica y sus componentes coordenadas canónicas.

Por ser (x, U) carta de Q de manera inmediata se comprueba que $((q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n), T^*U)$ es carta \mathcal{C}^∞ de T^*Q .

Definición 2.1.4. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación de tipo \mathcal{C}^∞ entre variedades. Definimos la aplicación tangente o diferencial de ϕ como $\phi_* : TM \rightarrow TN$, que dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $h \in \mathfrak{F}(N)$, actúa como

$$\phi_*(X)(h) = X(h \circ \phi), \quad (2.1.3)$$

tratándose de un functor covariante entre las variedades diferenciables y sus fibrados tangentes. Del mismo modo, se define la aplicación cotangente o codiferencial de ϕ , $\phi^* : T^*N \rightarrow T^*M$, que dada una 1-forma diferencial $\omega \in \Omega^1(N)$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ sobre un punto $p \in M$, actúa como

$$\phi^*(\omega)_p(X_p) = \omega_{\phi(p)}(\phi_*(X_p)) \quad (2.1.4)$$

Se trata de un functor contravariante entre las variedades diferenciables y sus fibrados cotangentes.

Actuando sobre coordenadas, dadas (x, U) carta local de M y (y, V) de N , se tiene que la aplicación diferencial actúa como

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} \quad (2.1.5)$$

de modo que su matriz como morfismo de espacios vectoriales $T_pM \rightarrow T_pN$ es la matriz jacobiana $J_p\phi$.

2.1.1. Sistemas Hamiltonianos. Introduzcamos ahora dos formas diferenciales de gran importancia a la hora de traducir la Mecánica Analítica al lenguaje de formas diferenciales y fibrados.

Definición 2.1.5. Sea Q una variedad diferenciable de dimensión finita n , (q^1, \dots, q^n) las coordenadas locales de Q y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ las de $M = T^*Q$ (que recordemos se trata de una variedad $2n$ -dimensional). Definimos las formas canónicas sobre M como

$$\theta_0 := \sum_{i=1}^n p_i dq^i = p_i dq^i, \quad \omega_0 := -d\theta_0 = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i = dq^i \wedge dp_i \quad (2.1.6)$$

Es inmediato que θ_0 es una 1-forma y ω_0 una 2-forma, exteriores ambas. Además, por definición, y aplicando que $d \circ d = 0$, se tiene que ω_0 es cerrada, esto es, $d\omega_0 = 0$. Veamos ahora dos importantes propiedades de θ_0 y ω_0 .

¹Demostremos este resultado en el siguiente capítulo, concretamente en el Corolario 3.1.10.

Proposición 2.1.6. *La 1-forma canónica θ_0 sobre T^*Q es la única 1-forma que cumple que, para cualquier $\beta \in \Omega^1(Q)$,*

$$\beta^*\theta_0 = \beta \quad (2.1.7)$$

Por lo tanto, $\beta^*\omega_0 = -d\beta$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar consideraremos el efecto de la codiferencial de $\beta : Q \rightarrow T^*Q$ (entendida como aplicación diferenciable entre variedades) sobre un sumando $p_i dq^i$. Aplicando la definición, dado un punto $x \in Q$ y un campo $Y \in \mathfrak{X}(Q)$:

$$(\beta^*(p_i dq^i))_x(Y_x) = (p_i dq^i)_{\beta(x)}(\beta_*(Y_x)) = p_i(\beta(x)) dq^i_{\beta(x)}(\beta_*(Y_x)) \quad (2.1.8)$$

Puesto que β es una sección del fibrado cotangente, tendremos $\beta(x) = (x^1, \dots, x^n, \beta_1(x), \dots, \beta_n(x))$, de modo que $p_i(\beta(x)) = \beta_i(x)$. Por su parte, del mismo modo se tiene $dq^i_{\beta(x)}(\beta_*(Y_x)) = dq^i_x(Y_x)$, al afectar dq^i a la i -ésima coordenada sobre Q , que queda fija por ser β sección. Se tiene pues $\beta^*(p_i dq^i) = \beta_i dq^i$. Aplicando ahora la linealidad de β^* , se tiene

$$\beta^*\theta_0 = \sum_{i=1}^n \beta^*(p_i dq^i) = \sum_{i=1}^n \beta_i dq^i = \beta \quad (2.1.9)$$

al ser $\{(dq^i)_p\}_{i=1}^n$ base de T_p^*Q en el que β tiene coordenadas β_i .

Para la unicidad basta ver que si existe otra 1-forma θ tal que $\beta^*\theta = \beta$ para toda $\beta \in \Omega^1(Q)$, entonces por la linealidad de β^* se tiene $\beta^*(\theta - \theta_0) = 0$. Aplicando sobre un campo X , se tiene $0 = \beta^*(\theta - \theta_0)(X) = (\theta - \theta_0)(\beta_*X)$, esto es, $\theta(\beta_*X) = \theta_0(\beta_*X)$. Basta tomar β la inclusión canónica de Q a T^*Q .

Finalizamos teniéndose que $\beta^*\omega_0 = -\beta^*(d\theta_0) = -d\beta^*\theta_0 = -d\beta$ aplicando el buen comportamiento de la diferencial exterior d respecto a aplicaciones (Proposición A.2.3). \square

Proposición 2.1.7. *Dada la 2-forma canónica ω_0 sobre $M = T^*Q$, $\forall p \in M$, si $\omega_0|_p(u, v) = 0$ para todo $v \in T_p^*M$, entonces $u = 0$. Diremos que ω_0 es no degenerada.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la definición de ω_0 y del producto exterior. Sean $u, v \in T_p^*M$ con expresión en coordenadas canónicas

$$u = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p + Y^i \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_p, \quad v = V^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p + W^i \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_p \quad (2.1.10)$$

Supongamos ahora que $\omega_0(u, v) = 0$. Desarrollando,

$$0 = \omega_0(u, v) = (dq^i \wedge dp_i)(u, v) = (dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i)(u, v) = \sum_{i=1}^n (X^i W^i - Y^i V^i) \quad (2.1.11)$$

Tomando ahora $v = \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_p$, se tiene respectivamente $X^i, Y^i = 0$. Por lo tanto, si $\omega_0|_p(u, v) = 0$ para todo $v \in T_p^*M$, $u = 0$. \square

De manera inmediata se tiene también que ω_0 es antisimétrica, al tratarse de una 2-forma exterior. Introducida la 2-forma canónica sobre Q , estamos en condiciones de volver a sacar a colación el término *Hamiltoniano*:

Definición 2.1.8. *Sea Q una variedad diferenciable, ω_0 su 2-forma canónica y $H : M = T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{C}^∞ . El campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\iota_{X_H} \omega_0 = dH \iff \omega_0(X_H, Y) = dH(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.1.12)$$

se denomina campo vectorial hamiltoniano (canónico) asociado a la función hamiltoniano H . Llamaremos sistema hamiltoniano a la terna (M, ω_0, X_H) .

Tal campo siempre existe, y como veremos ahora, viene dado por las conocidas *ecuaciones canónicas de Hamilton*:

Teorema 2.1.9. *Sea la 2-forma canónica $\omega_0 = dq^i \wedge dp_i$ en las coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Sin especificar el punto de aplicación, se tiene que el campo vectorial hamiltoniano se expresa como*

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right) = J dH, \quad \text{con } J = \begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

*Esto es, $(q(t), p(t))$ será curva integral (en $M = T^*Q$) de X_H si se cumplen las Ecuaciones de Hamilton:*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.1.14)$$

DEMOSTRACIÓN. Partamos de la definición de X_H según la ecuación 2.1.13. Veamos que se cumplen las expresiones 2.1.12 bajo las que definíamos el campo hamiltoniano. Tenemos que por definición, y por la ortonormalidad de las bases de los espacios tangentes,

$$\iota_{X_H} dq^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \iota_{X_H} dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (2.1.15)$$

de modo que aplicando las propiedades de ι_{X_H} y usando que $\iota_{X_H} dq^i$ y $\iota_{X_H} dp_i$ son funciones,

$$\iota_{X_H} \omega_0 = \sum_{i=1}^n \iota_{X_H} (dq^i \wedge dp_i) = \sum_{i=1}^n [(\iota_{X_H} dq^i) \wedge dp_i - dq^i \wedge (\iota_{X_H} dp_i)] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right) = dH \quad (2.1.16)$$

Por definición de curvas integrales se tiene lo referido a estas. \square

De manera inmediata probamos la *conservación de la función de energía* H :

Proposición 2.1.10. *Sea (M, ω_0, X_H) un sistema hamiltoniano y $c(t)$ una curva integral de X_H . Entonces $H(c(t))$ es constante respecto a t .*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la regla de la cadena y la definición de curvas integrales y de X_H :

$$\frac{d}{dt} H(c(t)) = dH(c(t)) \cdot c'(t) = dH(c(t)) \cdot X_H(c(t)) = \omega_0(X_H(c(t)), X_H(c(t))) = 0 \quad (2.1.17)$$

al ser ω_0 antisimétrica. \square

De manera inmediata se tiene que hamiltonianos distintos pueden llevar a las mismas ecuaciones del movimiento.

Proposición 2.1.11. *Dos hamiltonianos $H, \tilde{H} \in \mathfrak{F}(T^*Q)$ de terminan las mismas ecuaciones del movimiento si y solo si $H = \tilde{H} + a$ para algún $a \in \mathbb{R}$ constante.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el campo vectorial hamiltoniano X_H determina las ecuaciones del movimiento, y queda determinado por $\iota_{X_H} \omega_0 = dH$, dos campos $X_H, X_{\tilde{H}}$ serán los mismos si y solo si $dH = d\tilde{H}$, de modo que $d(H - \tilde{H}) = 0$. Por las propiedades de la diferencial exterior respecto a la diferenciación de funciones, se tiene que $H - \tilde{H}$ debe ser una constante. \square

2.1.2. Sistemas Lagrangianos. Como hemos visto en la sección anterior, en el fibrado cotangente T^*Q de una variedad (que podemos considerar *espacio de momentos*) se puede definir una estructura (T^*Q, ω_0, X_H) con la que recuperar las ecuaciones de Hamilton dado una función de energía H . Veamos en esta sección que es posible hacer lo propio en el fibrado tangente TQ (*espacio de velocidades*) para recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R} & & \\ & \nearrow H & & \nwarrow E & \\ T^*Q & \xleftarrow{FL} & TQ & \xrightarrow{L} & \mathbb{R} \\ & \searrow \pi_Q^* & & \swarrow \pi_Q & \\ & & Q & & \end{array}$$

La idea a seguir es la reflejada en el diagrama conmutativo superior. Partiendo de una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ (*lagrangiano*) se obtendrá una función *energía* E que al trasladarla al fibrado cotangente T^*Q (a través de, como definiremos, la *derivada de fibra* de L , $FL : TQ \rightarrow T^*Q$), se obtiene el *hamiltoniano* H . Las curvas soluciones en TQ (ec. de Euler-Lagrange) y en T^*Q (ec. de Hamilton) coincidirán al proyectarlas en Q .

Definición 2.1.12. *Sea Q una variedad diferenciable y $L \in \mathfrak{F}(TQ)$. La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} FL : TQ & \longrightarrow & T^*Q \\ w_q & \longmapsto & JL_q(w_q) \end{array} \quad (2.1.18)$$

entendiendo el jacobiano sobre el punto w_p como aplicación lineal entre $T_p TQ$ y \mathbb{R} ($JL_q(w_q) \in L(T_q Q, \mathbb{R}) = T_q^ Q$), se denomina derivada de fibra de L . El subíndice en q indica $w_q \in T_q Q$ y $L_q = L|_{T_q Q}$.*

Estamos ahora en condiciones de definir la forma análoga a la forma canónica ω_0 sobre TQ :

Definición 2.1.13. Sea ω_0 la 2-forma canónica sobre T^*Q y sea $L \in \mathfrak{F}(TQ)$. Definimos

$$\omega_L := (FL)^*\omega_0 \quad (2.1.19)$$

como la 2-forma de Lagrange.

Es inmediato que, al igual que ω_0 , ω_L es cerrada, pues utilizando que la aplicación codiferencial se comporta “bien” respecto a la derivada exterior, $d\omega_L = d(FL)^*\omega_0 = (FL)^*(d\omega_0) = 0$.

Previo paso a definir ω_L en coordenadas locales, introduzcamos un poco de notación. Sea $U \subseteq Q$ abierto y una carta $(q = (q^1, \dots, q^n), U)$ sobre Q . Del mismo modo que introdujimos las coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sobre T^*Q en la subsección anterior, ahora es natural definir la carta $((q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), TU)$ donde \dot{q}^i indica la clase de TU cuyo representante es la curva coordenada asociada a q^i . Por simplicidad, introduzcamos la siguiente notación para las derivadas parciales:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \quad L_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (2.1.20)$$

donde $\alpha, \beta \in \{q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\}$.

Una vez introducidas estas coordenadas locales sobre TQ , es inmediato que al actuar fibra a fibra, la expresión local de la derivada de fibra FL de un lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es la siguiente:

$$(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \mapsto FL(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \quad \text{con } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = L_{\dot{q}^i} \quad (2.1.21)$$

Por comparación con los *momentos generalizados* del capítulo anterior cobra sentido el denominar al espacio cotangente como “espacio de momentos”.

Veamos ahora la expresión local de ω_L .

Proposición 2.1.14. Sea $L \in \mathfrak{F}(TQ)$ y $((q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), TU)$ una carta sobre TQ . Utilizando la notación anterior y el convenio de sumación de Einstein, se tiene

$$\omega_L = L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} d\dot{q}^i \wedge d\dot{q}^j + L_{\dot{q}^i q^j} d\dot{q}^i \wedge dq^j \quad (2.1.22)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que en las coordenadas canónicas de T^*U se tiene que $\omega_0|_{T^*U} = dq^i \wedge dp_i$, usando que la derivada de fibra actúa fibra a fibra de TU a T^*Q y las propiedades de la codiferencial, se tiene

$$\begin{aligned} \omega_L|_{TU} &= (FL^*\omega_0)|_{TU} = FL^*(\omega_0|_{T^*U}) = FL^*(dq^i \wedge dp_i) = d(FL^*q^i) \wedge d(FL^*p_i) \\ &= d(q^i \circ FL) \wedge d(p_i \circ FL) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Puesto que $FF : TQ \rightarrow T^*Q$ fibra a fibra, se tendrá que $q^i \circ FL = q^i$. Puesto que p^i proyecta sobre la $n+i$ -ésima coordenada y FL está dado por el jacobiano de $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ en cada fibra, se tiene que $p_i \circ FL$ es la $n+i$ -ésima columna de JL , $L_{\dot{q}^i}$. Por tanto $\omega_L|_{TU} = dq^i \wedge dL_{\dot{q}^i}$. Basta desarrollar $dL_{\dot{q}^i}$ sobre las coordenadas,

$$dL_{\dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial q^j} L_{\dot{q}^i} dq^j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} L_{\dot{q}^i} d\dot{q}^j = L_{\dot{q}^i q^j} dq^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} d\dot{q}^j \quad (2.1.24)$$

para llegar al resultado deseado. \square

Si bien no entraremos en detalles, es posible definir la *1-forma de Lagrange*, $\theta_L := (FL)^*\theta_0$ a partir de la 1-forma canónica en T^*Q . Es inmediato (de nuevo por el comportamiento de la codiferencial respecto al diferencial exterior) que $\omega_L = -d\theta_L$, y siguiendo una demostración análoga a la anterior, que en coordenadas locales $\theta_L = L_{\dot{q}^i} d\dot{q}^i$. Introduzcamos ahora algunos conceptos interesantes:

Definición 2.1.15. Dada una función (lagrangiano) $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la acción

$$\begin{aligned} A : TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_x &\longmapsto A(v_x) = FL(v_x) \cdot v_x \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

y la energía $E := A - L$ (también función de TQ a \mathbb{R}). Un campo vectorial $X_E \in \mathfrak{X}(TQ)$ se dice campo vectorial lagrangiano para L si $\iota_{X_E} \omega_L = dE$. En caso de existir (no tiene por qué hacerlo ni ser único), se dice que se pueden definir ecuaciones consistentes del movimiento.

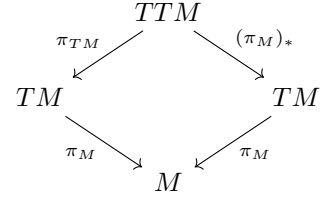
Al aplicarse sobre vectores de TQ , es inmediato que en coordenadas locales $A = L_{\dot{q}^i} \dot{q}^i$, de modo que $E = L_{\dot{q}^i} \dot{q}^i - L$. Veamos ahora un concepto que es nuevo respecto a la Formulación Hamiltoniana, al definirse la aplicación diferencial sobre campos vectoriales, no 1-formas.

Definición 2.1.16. Dada una variedad diferenciable M , un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(TM)$ se dice ecuación de segundo orden si $(\pi_M)_*(X) = \text{Id}_M$, siendo $\pi_M : TM \rightarrow M$ la proyección natural. Esto es, considerando la proyección natural $\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM$, $\pi_{TM}(X) = (\pi_M)_*(X)$. Llamaremos fibrado tangente de segundo orden de M , T^2M , al conjunto de elementos de TTM en el que ambas proyecciones sobre TM coinciden:

$$T^2M := \{p \in TTM : \pi_{TM}(p) = (\pi_M)_*(p)\} \subseteq TTM \quad (2.1.26)$$

Observación 2.1.17. La motivación detrás de esta definición está en el hecho de que se pueda dotar a TTM de dos estructuras como fibrado vectorial. En primer lugar, tenemos podemos considerar TM como variedad diferenciable con $\dim TM = 2 \dim M$, y considerar $TTM = T(TM)$ como su fibrado tangente, de dimensión $4 \dim M$, y la proyección natural asociada $\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM$.

Por otro lado, considerando la proyección $\pi_M : TM \rightarrow M$ como aplicación entre variedades, podemos tomar la aplicación diferencial o tangente asociada, $(\pi_M)_* : TTM \rightarrow TM$. Si bien el diagrama asociado es conmutativo, esto es, $\pi_M \circ \pi_{TM} = \pi_M \circ (\pi_M)_*$, en general no se tiene que $\pi_{TM} = (\pi_M)_*$, ocurriendo esto únicamente sobre el fibrado tangente de segundo orden, T^2M , donde se tiene $\pi_{TM}|_{T^2M} = (\pi_M)_*|_{T^2M}$, por definición de este. Si tenemos $(a, b, c, d) \in TTM$, entonces $\pi_{TM}((a, b, c, d)) = (a, b)$, $(\pi_M)_*((a, b, c, d)) = (a, c)$, con $\pi_M \circ \pi_{TM}((a, b, c, d)) = \pi \circ (\pi_M)_*((a, b, c, d)) = a$, de modo que los elementos de T^2M son del tipo (x, v, v, a) . Es sobre T^2M donde se puede definir la aceleración a de curvas, de igual manera que el concepto de velocidad v cobra sentido en TM .



Llegamos por fin a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema 2.1.18. Sea Q una variedad de dimensión n , y supongamos que $X_E \in \mathfrak{X}(TQ)$ es un campo vectorial lagrangiano para $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, asumiendo que es ecuación de segundo orden. Sobre una carta $((q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), TU)$, si $(u(t), v(t))$ es una curva integral de X_E , entonces satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(u(t), v(t)) \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} L(u(t), v(t)), \quad \text{con } v(t) := \frac{d}{dt} u(t) \quad (2.1.27)$$

Si además L es regular, esto es, FL es una submersión², X_E siempre existe y es una ecuación de segundo orden.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, para evitar sobrecargar las expresiones, no se indicará el punto de TQ en el que se aplican las funciones. Dadas las coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ para un abierto TU de TQ , podemos separar $X_E = (Y, Z)$. Utilicemos, bajo la definición de X_E , $\iota_{X_E} \omega_L = dE$. Expresemos cada uno en coordenadas locales.

En primer lugar, partiendo de la Proposición 2.1.14, tenemos $\omega_L = L_{\dot{q}^i q^j} dq^i \wedge dq^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j$, por lo que dado un elemento $e = (e_1, e_2) \in TQ$, tendremos,

$$\iota_{X_E} \omega_L(e) = \omega_L((Y, Z), (e_1, e_2)) = L_{\dot{q}^i q^j} (Y^i e_1^j - e_1^i Y^j) + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} (Y^i e_2^j - e_1^i Z^j) \quad (2.1.28)$$

usando $d\alpha \wedge d\beta = d\alpha \otimes d\beta - d\beta \otimes d\alpha$. Ahora, para el término derecho de $\iota_{X_E} \omega_L = dE$, usando que en coordenadas locales $A = L_{\dot{q}^i \dot{q}^i}$, tendremos que usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} dE &= d(A - L) = d(L_{\dot{q}^i \dot{q}^i} - L) = \dot{q}^i dL_{\dot{q}^i} + L_{\dot{q}^i} d\dot{q}^i - dL \\ &= L_{\dot{q}^i} d\dot{q}^i + \dot{q}^i (L_{\dot{q}^i q^j} dq^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} d\dot{q}^j) - L_{q^i} dq^i + L_{\dot{q}^i} d\dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i L_{\dot{q}^i q^j} dq^j + \dot{q}^i L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} d\dot{q}^j - L_{q^i} dq^i \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

de modo que sobre un elemento $e = (e_1, e_2) \in TQ$,

$$dE(e) = \dot{q}^i L_{\dot{q}^i q^j} e_1^j + \dot{q}^i L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} e_2^j - L_{q^i} e_1^i \quad (2.1.30)$$

Igualando las ecuaciones 2.1.28 y 2.1.30, se tiene

$$L_{\dot{q}^i q^j} Y^i e_1^j - L_{\dot{q}^i q^j} e_1^i Y^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} Y^i e_2^j - L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} e_1^i Z^j = \dot{q}^i L_{\dot{q}^i q^j} e_1^j + \dot{q}^i L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} e_2^j - L_{q^i} e_1^i \quad (2.1.31)$$

Si $(u(t), \dot{u}(t)) = (u(t), v(t))$ es curva integral de X_E , tendremos $X_E(u(t), v(t)) = (Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t))) = (\dot{u}(t), \dot{v}(t))$, de modo que cancelando términos en la ecuación 2.1.31, llegamos a

$$L_{\dot{q}^i q^j} e_1^i \dot{u}^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} e_1^i \dot{v}^j = L_{q^i} e_1^i \quad (2.1.32)$$

²Se dice que una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es una *submersión* si la aplicación tangente $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva para todo $p \in M$.

Puesto que esto es cierto para todo e_1 , tendremos

$$L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} \dot{u}^j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} \dot{v}^j = L_{q^i} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(u(t), v(t)) \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} L(u(t), v(t)) \quad (2.1.33)$$

aplicando la regla de la cadena. Notar que hemos aplicado la condición de que X_E es ecuación de segundo orden al tomar $Y = (\pi_{TQ})_*(X_E) = \text{Id}_{TQ}(X_E)$.

Suponiendo ahora L regular, veamos la existencia de X_E . Por definición, X_E será el campo vectorial sobre TQ tal que

$$\iota_{X_E} \omega_L = dE \Leftrightarrow \omega_L(Y, X_E) = dE(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(TQ) \quad (2.1.34)$$

Desarrollando para un campo vectorial Y arbitrario sobre TQ ,

$$dE(Y) = \omega_L(Y, X_E) = ((FL)^* \omega_0)(Y, X_E) = \omega_0((FL)_*(Y, X_E)) \quad (2.1.35)$$

Por ser FL submersión, $(FL)_*$ es suprayectiva, y como es aplicación lineal y $\dim(T_p TQ) = \dim(T_p^* TQ)$ en todo punto $p \in TQ$, se tiene que es biyectiva. Como ω_0 es no degenerada y $X_E \neq 0$, existirá algún campo $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$ tal que $\omega_0((FL)_*(Y, X_E)) \neq 0$. Se tendrá entonces $\omega_0((FL)_*(X_E, \cdot)) = \iota_{(FL)_* X_E} \omega_0 = dE$, siendo equivalente a obtener el campo hamiltoniano $(FL)_* X_E$ asociado a la función E . Como tal campo siempre existe, tendremos un $X_H \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ que cumpla lo requerido. Como L es regular, podremos invertir $(FL)_*$ y recuperar X_E .

Por su parte, para ver que X_E es de segundo orden, basta tomar la ecuación 2.1.31 y tomar $e_1 = 0$:

$$L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} Y^i c_2^j = \dot{q}^i L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} c_2^j \quad (2.1.36)$$

Por inspección, se tiene que $Y^i = \dot{q}^i$. Como $X_E = (Y, Z)$, con Y tomando valores sobre TQ , es inmediato que $\pi_{TQ}(X_E) = Y = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (\pi_Q)_*(X_E)$, siendo entonces X_E ecuación de segundo grado. \square

De la misma forma que en el caso hamiltoniano, tenemos que dos lagrangianos L y \tilde{L} pueden llevar a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange. La siguiente proposición describe las condiciones para que esto ocurra.

Proposición 2.1.19. Sean $L, \tilde{L} \in \mathfrak{F}(TQ)$ dos hamiltonianos regulares sobre TQ , con los campos vectoriales lagrangianos correspondientes $X_E, X_{\tilde{E}}$. Es equivalente

- I) $L = \tilde{L} + \alpha + c$, con $\alpha : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ una 1-forma cerrada en Q y $c \in \mathbb{R}$ constante.
- II) $X_E = X_{\tilde{E}}$ y $\omega_L = \omega_{\tilde{L}}$

DEMOSTRACIÓN.

I \Rightarrow II) Partamos de $L = \tilde{L} + \alpha + c$. En primer lugar, tenemos que entendiendo α como una sección del fibrado cotangente y es lineal en cada fibra, se puede entender como $\alpha_p : T_p Q \rightarrow \mathbb{R}$ para $p \in Q$. Por tanto la derivada de fibra es ella misma (tomando puntos de Q), de modo que $F\alpha = \alpha \circ \pi_Q$. Así $FL = F\tilde{L} + \alpha \circ \pi_Q$. De manera inmediata se tiene

$$E = A - L = FL - L = F\tilde{L} + \alpha \circ \pi_Q - \tilde{L} - \alpha - c = \tilde{E} - c \quad (2.1.37)$$

entendiendo que FL y α actúan fibra a fibra. Así $dE = d\tilde{E}$, y $X_E = X_{\tilde{E}}$. La relación entre las 2-formas de Lagrange será:

$$\omega_L = (FL)^* \omega_0 = (F\tilde{L})^* \omega_0 + \alpha^* \omega_0 = \omega_{\tilde{L}} + \alpha^* \omega_0 \quad (2.1.38)$$

Por la Proposición 2.1.6, se tiene que $\alpha^* \omega_0 = -d\alpha = 0$ por ser α cerrada, de modo que $\omega_L = \omega_{\tilde{L}}$.

II \Rightarrow I) Si tenemos $X_E = X_{\tilde{E}}$ y $\omega_L = \omega_{\tilde{L}}$, entonces $dE = \iota_{X_E} \omega_L = \iota_{X_{\tilde{E}}} \omega_{\tilde{L}} = d\tilde{E}$, de modo que $d(E - \tilde{E}) = 0$ y $E = \tilde{E} + c$ para algún $c \in \mathbb{R}$ constante. Puesto que $E = A - L$, se tiene que, dado $v_x \in TQ$,

$$FL(v_x) \cdot v_x - L(v_x) = F\tilde{L}(v_x) \cdot v_x - \tilde{L}(v_x) + c \Leftrightarrow L(v_x) = \tilde{L}(v_x) + [FL(v_x) - F\tilde{L}(v_x)] \cdot v_x - c \quad (2.1.39)$$

Por otro lado, como por hipótesis $\omega_L = \omega_{\tilde{L}}$, por definición de la 2-forma de Lagrange, $\omega_L(v_x) = (FL^* \omega_0)(v_x) = \omega_0(FL_* v_x)$, FL y $F\tilde{L}$ no puede depender de $v_x \in T_x Q$. Por tanto la forma $\alpha_x := FL(v_x) - F\tilde{L}(v_x)$, con $v_x \in T_x Q$, está bien definida sobre TQ . Puesto que $\omega_L = \omega_{\tilde{L}}$, se tiene que $\alpha^* \omega_0 = 0$, y por el mismo argumento que en el apartado anterior, se tiene que α es cerrada. \square

2.2. La transformada de Legendre

Una vez “traducidos” los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano respectivamente sobre los fibrados tangente y cotangente, en esta sección veremos el caso *hiperregular* de estos, en los que es posible pasar de uno a otro mediante la *transformada de Legendre*. Veamos en primer lugar el paso de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana.

Definición 2.2.1. Sea Q una variedad diferenciable y un lagrangiano $L \in \mathfrak{F}(TQ)$. Diremos que L es un lagrangiano hiperregular si la derivada de fibra $FL : TQ \rightarrow T^*Q$ es un difeomorfismo.

Lema 2.2.2. Sea $\phi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades diferenciables. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial y $c : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva integral de X . Entonces $\phi \circ c$ es curva integral de ϕ_*X .

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis tenemos que

$$\frac{d}{dt}c(t) = X(c(t)) \quad (2.2.1)$$

Aplicando la regla de la cadena y que la matriz asociada a ϕ_* es el jacobiano $J\phi$ aplicado en cada punto,

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c)(t) = J_{c(t)}\phi \cdot \frac{d}{dt}c(t) = J_{c(t)}\phi \cdot X(c(t)) = \phi_*X(\phi(c(t))) \quad (2.2.2)$$

teniénose que $\phi \circ c$ es curva integral de ϕ_*X . El que sea ϕ difeomorfismo nos asegura que $\phi \circ c$ continúa siendo una curva simple y por lo tanto no se autointersecciona o tiene puntos de retroceso. \square

Teorema 2.2.3. Sea L un lagrangiano hiperregular sobre Q y E su energía asociada. Definamos la función hamiltoniana $H := E \circ (FL)^{-1} : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$. Los campos vectoriales asociados a E y H , respectivamente X_E y X_H , están relacionados como

$$X_H = (FL)_*X_E, \quad (2.2.3)$$

aplicándose las curvas integrales de X_E en las de X_H por medio de FL . De hecho, las proyecciones de estas sobre Q por medio de π_Q y π_Q^* (denominadas curvas integrales base) coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que $X_H = (FL)_*X_E$. Tomemos $v \in TQ$, $w \in T_vTQ$ y sea $v^* := (FL)_*(w)$, entendiéndose $(FL)_*$ sobre T_vTQ . Aplicando la definición de $\omega_L = (FL)^*\omega_0$ y que $E = H \circ FL$, se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_0((FL)_*(X_E(v)), v^*) &= \omega_L(X_E(v), w) = dE(v) \cdot w = d(H \circ FL)(v) \cdot w \\ &= dH(FL(v)) \cdot (FL)_*(w) = dH(FL(v)) \cdot v^* = \omega_0(X_H(FL(v)), v^*) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Por ser ω_0 bilineal, esto equivale a

$$\omega_0((FL)_*(X_E(v)) - X_H(FL(v)), v^*) = 0 \quad (2.2.5)$$

Por ser FL difeomorfismo, $(FL)_*$ es isomorfismo sobre cada fibra, de modo que para todo v^* va a existir un $w \in T_vTQ$ tal que $v^* = (FL)_*(w)$. Como ω_0 es no degenerada, y la expresión anterior es válida para todo v^* , se tiene entonces

$$(FL)_*(X_E(v)) = X_H(FL(v)), \quad \forall v \in TQ \quad (2.2.6)$$

esto es,

$$(FL)_*X_E = X_H \quad (2.2.7)$$

Por el Lema 2.2.2, puesto que $FL : TQ \rightarrow T^*Q$ es aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, se tiene que si $c : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow TQ$ es una curva integral de X_E , entonces $FL \circ c$ es curva integral en T^*Q de $(FL)_*X_E = X_H$. Por último, al actuar FL fibra a fibra, se tiene que $\pi_Q = \pi_Q^* \circ FL$, de modo que $\pi_Q(c(t)) = \pi_Q^*(FL(c(t)))$, teniendo las mismas curvas integrales base sobre Q . \square

Se denomina *transformada de Legendre* asociada al lagrangiano L a la aplicación FL . La definición tradicional para una función real de variable real $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa es que ella y su transformada de Legendre f^* cumplan

$$f' = (f^*)'^{-1}, \quad (2.2.8)$$

de modo que susderivadas son una la función inversa de la otra, y dada f , su transformada f' está definida salvo constante aditiva. Para otras propiedades, se remite al Capítulo 20 de [Cannas, 2001].

En el contexto de la Mecánica, clásicamente se entiende la Transformada de Legendre como la transformación

$$L(q^i, \dot{q}^i) \mapsto H(q^i, p^i) = \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i), \quad \text{con } p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.2.9)$$

pasándose de un lagrangiano $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 - V(q)$ a un hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q)$, donde \dot{q} y p son las variables de cada uno y q (y por tanto $V(q)$) se consideran constantes. Es inmediato que $\|p\|^2$ y $\|\dot{q}\|^2$ son funciones convexas.

La obtención de un lagrangiano L a partir de un hamiltoniano H es ligeramente más complicada. En primer lugar, definamos una *acción* asociada a H :

Proposición 2.2.4. *Sea L un lagrangiano hiperregular en Q y $H = E \circ (\text{FL})^{-1}$ el hamiltoniano obtenido como se explica en el Teorema 2.2.3, donde E es la energía asociada a L . Entonces se tiene $\theta_0(X_H) = A \circ (\text{FL})^{-1}$, con A la acción de L y θ_0 la 1-forma canónica sobre T^*Q . Definiremos $G := \theta_0(X_H)$ como la acción asociada a H .*

DEMOSTRACIÓN. Partamos de la expresión de la 1-forma θ_0 en coordenadas canónicas, $\theta_0 = p_i dq^i$. Puesto que se tiene por el Teorema 2.1.9 que $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right)$, es inmediato que

$$\theta_0(X_H) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.2.10)$$

Teniendo en cuenta que por la transformada de Legendre $q^i \mapsto q^i$ y $\dot{q}^i \mapsto L_{\dot{q}^i} \equiv p_i$, queremos tener

$$E = A - L = \dot{q}^j L_{\dot{q}^j} - L \equiv \dot{q}^j p_j - L \implies \frac{\partial E}{\partial p_i} = \dot{q}^j \delta_{ji} + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} p_j - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \dot{q}^i + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad (2.2.11)$$

Inmediatamente se tiene la relación con el cambio de coordenadas dado por la transformada de Legendre:

$$(\theta_0(X_H)) \circ (\text{FL}) = \left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \circ (\text{FL}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = A, \quad (2.2.12)$$

usando $H = E \circ (\text{FL})^{-1}$. \square

Veamos por fin el paso de H a L y viceversa:

Teorema 2.2.5.

- I) *Sea H un hamiltoniano hiperregular en T^*Q . Definiendo $E := H \circ (\text{FH})^{-1}$ y $A := G \circ (\text{FH})^{-1}$, se tiene que $L := A - E$ es un lagrangiano hiperregular en TQ , teniéndose $\text{FL} = (\text{FH})^{-1}$.*
- II) *Sea L un lagrangiano hiperregular sobre TQ y E su energía asociada. Entonces $H := E \circ (\text{FL})^{-1}$ es un hamiltoniano hiperregular en T^*Q , y $\text{FH} = (\text{FL})^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN.

- I) Trabajaremos en coordenadas locales. En primer lugar notar que como $\dim(TQ) = 2\dim(Q) = 2n$ finita, se tiene que $(T_p Q)^{**} \simeq T_p Q$, de modo que podemos identificar $T^{**}Q \simeq TQ$, y ver $\text{FH} : T^*Q \rightarrow TQ$ como una aplicación actuando fibra a fibra, aplicando

$$(q^i, p_i) \mapsto \left(q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = (q^i, \dot{q}^i) \quad (2.2.13)$$

por las ecuaciones canónicas de Hamilton (2.1.9). Ahora, recordando que $\theta_0 = p_i dq^i$, $G = \theta_0(X_H) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Ahora,

$$L \circ \text{FH} = (A - E) \circ \text{FH} = G - H = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H = p_i \dot{q}^i - H \quad (2.2.14)$$

Entendiendo así FH como un cambio de variable, derivamos respecto a \dot{q}^j y aplicamos la regla de la cadena para obtener el valor de $\text{FL}(q^j)$:

$$\text{FL}(q^j) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^i + p_i \delta^{ij} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = p_j \quad (2.2.15)$$

Puesto que q^i se preserva tanto por FH como por $\text{FL} \circ \text{FH}(p_i) = \text{FL}(q^i) = p^i$, se tiene que $\text{FL} \circ \text{FH} = \text{Id}_{T^*Q}$. Sin embargo, puesto que FH es difeomorfismo por ser H hiperregular, se tiene $\text{FL} = \text{FL} \circ [\text{FH} \circ (\text{FH})^{-1}] = (\text{FL} \circ \text{FH}) \circ (\text{FH})^{-1} = (\text{FH})^{-1}$, por lo que FL es un difeomorfismo y L es hiperregular.

- II) De manera análoga, aplicando que FL aplica $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$, se tiene

$$H \circ \text{FL} = E = A - L = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \dot{q}^i p_i - L \quad (2.2.16)$$

Una vez cambiadas las coordenadas, derivamos respecto a p_j y tenemos, tal y como hicimos en el anterior apartado,

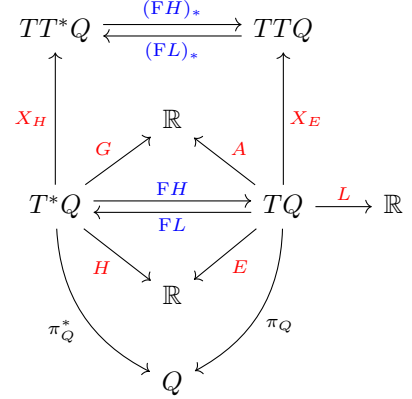
$$FH(p_i) = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^i + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad (2.2.17)$$

Como las derivadas de fibra actúan “fibra a fibra”, se tiene que $FH \circ FL = \text{Id}_{TQ}$. Por ser FL difeomorfismo, con el mismo razonamiento se tiene que $FH = (FL)^{-1}$, difeomorfismo, y H es hiperregular.

Como se habrá observado, la sutileza de esta demostración es comprobar que $\frac{\partial H}{\partial p_i} = FH(p_i)$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = FL(\dot{q}^i)$ corresponden justamente con los \dot{q}^i y p_i canónicos. \square

Completemos la sección con el siguiente resultado, que resume la relación entre las fomulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana.

Teorema 2.2.6. *Utilizando la notación introducida en la sección y los resultados vistos en esta, los lagrangianos hiperregulares L sobre TQ y los hamiltonianos hiperregulares H sobre T^*Q se corresponden de manera biyectica. El diagrama adjunto es conmutativo.*



DEMOSTRACIÓN. Completemos los ciclos que faltan por demostrar.

- Sea L un lagrangiano hiperregular sobre TQ y $H := E \circ (FL)^{-1}$ el hamiltoniano construido a partir de él. Se tiene

$$H := E \circ (FL)^{-1} = (A - L) \circ (FL)^{-1} = G - L \circ FH \quad (2.2.18)$$

Sea ahora $L' := G \circ (FH)^{-1} - H \circ (FH)^{-1}$ el lagrangiano construido a partir de H . Veamos que es L :

$$L' = G \circ (FH)^{-1} - H \circ (FH)^{-1} = G \circ (FH)^{-1} - (G - L \circ FH) \circ (FH)^{-1} = L \circ [FH \circ (FH)^{-1}] = L \quad (2.2.19)$$

- Análogamente, dado H un hamiltoniano hiperregular y $L = G \circ (FH)^{-1} - H \circ (FH)^{-1}$ el lagrangiano construido a partir de H , construyamos $H' := E \circ (FL)^{-1}$, con $E = A - L$ la energía asociada a L y $A = G \circ (FH)^{-1}$ es la acción de L , por la Proposición 2.2.4. Así:

$$H' = E \circ (FL)^{-1} = A \circ (FL)^{-1} - L \circ (FL)^{-1} = G - (G \circ (FH)^{-1} - H \circ (FH)^{-1}) \circ FH = H \quad (2.2.20)$$

El resto de ciclos del diagrama se han visto en los resultados de la sección. \square

2.3. Ejemplo: Péndulo Doble

Mostremos ahora en un ejemplo concreto algunos de los resultados desarrollados en este capítulo. En este caso se ha elegido el *péndulo doble*, formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 , unidas entre sí y a un punto fijo por dos barras de masas despreciables y longitud l_1 y l_2 , como se muestra en la Figura 2. Como veremos a continuación, el espacio de configuraciones natural del sistema no es \mathbb{R}^6 .

Cada partícula i del sistema estará sometida a un potencial de tipo gravitatorio $V = gm_i y_i$, donde g es la constante de aceleración gravitatoria, y m_i e y_i la masa y la altura de dicha partícula respecto a un punto fijo. Puesto que el “estado” del péndulo viene dada por los ángulos θ_1 y θ_2 que describe cada barra respecto a la vertical, el espacio de configuraciones del sistema será $Q = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{T}^2$. El paso de estas coordenadas a las cartesianas es el siguiente:

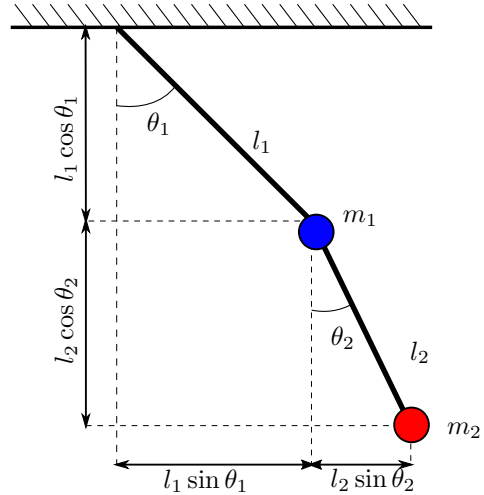


FIGURA 2. Esquema del péndulo doble y los ángulos θ_1 y θ_2 implicados.

$$\begin{cases} (x_1, y_1) &= (l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1) \\ (x_2, y_2) &= (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Desarrollaremos en primer lugar el sistema en formulación lagrangiana. Para ello, definiremos un lagrangiano $L = T - V$, donde T y V son respectivamente las energías cinética y potencial estándar del sistema, como fueron introducidas en el Capítulo 1. Así:

$$V = V_1 + V_2 = -gm_1 l_1 \cos \theta_1 - gm_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) = -g(m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 - gm_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \\ &= \dots = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

de modo que

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 + gm_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.3.4)$$

Calculemos las primeras y segundas derivadas, siguiendo la notación introducida por la expresión 2.1.20, que serán necesarias más adelante:

$$\begin{aligned} L_{\theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1 \sin \theta_1 \\ L_{\theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - gm_2 l_2 \sin \theta_2 \\ L_{\dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ L_{\dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

y

$$\begin{aligned} L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \\ L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} &= L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1} = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \\ L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Puesto que en las derivadas $L_{\dot{\theta}_i}$ vistas como funciones de $\dot{\theta}_j$ son formas de primer grado, por el Teorema de Euler para funciones homogéneas se tiene $L_{\dot{\theta}_i} = L_{\dot{\theta}_i \dot{\theta}_1} \dot{\theta}_1 + L_{\dot{\theta}_i \dot{\theta}_2} \dot{\theta}_2$, que usaremos más adelante. Podemos obtener ahora la acción y energía asociadas a este lagrangiano L , aplicando las expresiones en coordenadas $A = L_{\dot{\theta}_i} \dot{\theta}^i$ y $E = A - L$:

$$A = L_{\dot{\theta}_1} \dot{\theta}_1 + L_{\dot{\theta}_2} \dot{\theta}_2 = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.3.7)$$

$$E = A - L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 - gm_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.3.8)$$

Como era de esperar, $E = T + V$, correspondiéndose con la energía “estándar”, siendo la acción $A = 2T$. Nos encontramos ahora en condiciones de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este lagrangiano, $\dot{L}_{\dot{\theta}_i} = L_{\theta_i}$:

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0 \quad (2.3.9a)$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0 \quad (2.3.9b)$$

Se ha eliminado un factor común de l_1 y $l_2 m_2$ respectivamente para simplificar cada ecuación. Como se puede apreciar, se tiene un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas, el cual no tiene soluciones analíticas generales, y debe ser resuelto mediante métodos numéricos. Sí puede obtenerse una expresión analítica para el campo vectorial lagrangiano X_E , para el cual es necesario expresar en primer lugar la 2-forma de Lagrange en coordenadas, para lo cual usamos la Proposición 2.1.14:

$$\begin{aligned} \omega_L &= L_{\dot{\theta}_i \theta_j} d\theta^i \wedge d\theta^j + L_{\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j} d\dot{\theta}^i \wedge d\dot{\theta}^j \\ &= (L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} - L_{\dot{\theta}_2 \theta_1})(d\theta_1 \otimes d\theta_2 - d\theta_2 \otimes d\theta_1) + L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}(d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_1 - d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_1) \\ &+ L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}(d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_2 - d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_1 + d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_1 - d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_2) + L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2}(d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_2 - d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_2) \\ &= m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) (d\theta_1 \otimes d\theta_2 - d\theta_2 \otimes d\theta_1) + (m_1 + m_2)l_1^2 (d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_1 - d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_1) \\ &+ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) (d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_2 - d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_1 + d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_1 - d\dot{\theta}_1 \otimes d\dot{\theta}_2) + m_2 l_2^2 (d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_2 - d\dot{\theta}_2 \otimes d\dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Por otro lado, dado el campo lagrangiano $X_E = (Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) \in \mathfrak{X}(TQ)$, tendremos que su producto interno con ω_L será:

$$\begin{aligned} \iota_{X_E} \omega_L &= (L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} - L_{\dot{\theta}_2 \theta_1})(Y_1 d\theta_2 - Y_2 d\theta_1) + L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}(Y_1 d\dot{\theta}_1 - Z_1 d\theta_1) \\ &+ L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}(Y_1 d\dot{\theta}_2 - Z_2 d\theta_1 + Y_2 d\dot{\theta}_1 - Z_1 d\dot{\theta}_2) + L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2}(Y_2 d\dot{\theta}_2 - Z_2 d\theta_2) \\ &= [-(L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} - L_{\dot{\theta}_2 \theta_1})Y_2 - L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}Z_1 - L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}Z_2] d\theta_1 + [(L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} - L_{\dot{\theta}_2 \theta_1})Y_1 - L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}Z_1 - L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2}Z_2] d\theta_2 \\ &+ [L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}Y_1 + L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}Y_2] d\dot{\theta}_1 + [L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1}Y_1 + L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2}Y_2] d\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Por su parte, aplicando la expresión 2.1.29 anteriormente calculada, el diferencial de energía en coordenadas locales podrá expresarse como

$$\begin{aligned} dE &= \dot{\theta}_1 \left[L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} d\theta_1 + L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} d\theta_2 + L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1} d\dot{\theta}_1 + L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} d\dot{\theta}_2 \right] + L_{\theta_1} d\theta_1 \\ &+ \dot{\theta}_2 \left[L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} d\theta_1 + L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} d\theta_2 + L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1} d\dot{\theta}_1 + L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2} d\dot{\theta}_2 \right] + L_{\theta_2} d\theta_2 \\ &= \left[\dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} + L_{\theta_1} \right] d\theta_1 + \left[\dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} + L_{\theta_2} \right] d\theta_2 \\ &+ \left[\dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1} \right] d\dot{\theta}_1 + \left[\dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2} \right] d\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Aplicando ahora la condición de campo lagrangiano (ver definición 2.1.15), $\iota_{X_E} \omega_L = dE$, y utilizando que $\{d\theta_1, d\theta_2, d\dot{\theta}_1, d\dot{\theta}_2\}$ es base de $T^*(TQ)$, tendremos que $Y_1 = \dot{\theta}_1$ y $Y_2 = \dot{\theta}_2$ (igualando los coeficientes de $d\dot{\theta}_1$ y $d\dot{\theta}_2$), lo que era de esperar al ser X_E ecuación de segundo orden. Por su parte, respecto a Z_1 y Z_2 , igualando respectivamente los coeficientes de $d\theta_1$ y $d\theta_2$ y simplificando un poco se llega al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} & L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} \\ L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} & L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} \end{bmatrix}}_{M_L} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{\theta_1} + \dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} \\ L_{\theta_2} + \dot{\theta}_1 L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} + \dot{\theta}_2 L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} \end{bmatrix} \quad (2.3.13)$$

el cual tiene solución para cualquier conjunto de parámetros ya que

$$\det M_L = m_2(m_1 + m_2)l_1^2 l_2^2 - [m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^2 = m_2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)] > 0 \quad (2.3.14)$$

al ser las masas siempre positivas. Como se aprecia, el sistema tiene gran simetría, y la siguiente solución, que expresamos en forma explícita, tras las simplificaciones oportunas:

$$Z_1 = \frac{g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 + g m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2m_2 [l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 - 2\dot{\theta}_1) + l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.3.15a)$$

$$Z_2 = \frac{[l_1 (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_2) - g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 - l_2 m_2 (2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.3.15b)$$

Se llega así a una expresión que, si bien complicada, puede ser evaluada sin ninguna dificultad.

Querremos pasar ahora, por medio de la transformada de Legendre, a la formulación hamiltoniana asociada a la lagrangiana que acabamos de obtener. Para ello, utilizaremos la derivada de fibra de L , $FL : TQ \rightarrow T^*Q$, que lleva los puntos $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ a $(\theta_1, \theta_2, \mu_1, \mu_2)$, con $\mu_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$. Esto es,

$$\begin{cases} \mu_1 &= L_{\dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \mu_2 &= L_{\dot{\theta}_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\dot{\theta}_1 \theta_1} & L_{\dot{\theta}_1 \theta_2} \\ L_{\dot{\theta}_2 \theta_1} & L_{\dot{\theta}_2 \theta_2} \end{bmatrix}}_{M_L} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.16)$$

viéndose la descomposición de $L_{\dot{\theta}_i}$ vista anteriormente para obtener la matriz M_L . Por tanto, fibra a fibra, en las bases que venimos utilizando en cada espacio, FL vendrá dada por la matriz

$$FL_q \equiv \begin{bmatrix} \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & M_L \end{bmatrix}, \quad (2.3.17)$$

que al tratarse de una aplicación lineal fibra a fibra coincide con su matriz jacobiana, JL_q . Como hemos visto, tiene determinante no nulo y por lo tanto es suprayectiva, al tener los espacios tangentes de llegada y salida la misma dimensión. Por tanto FL es submersión y L es regular, de modo que por el Teorema 2.1.18 X_E existe y es ecuación de segundo orden, como ya habíamos comprobado obteniendo su expresión explícita. Por su parte, aplicando el Teorema 2.2.5, podemos pasar de la energía E asociada a L a una función hamiltoniana $H = E \circ (FL)^{-1}$, lo cual equivale a un cambio de coordenadas de la expresión de E en $\{\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\}$ a H en $\{\theta_1, \theta_2, \mu_1, \mu_2\}$. Observando la expresión de $E = T + V$, puesto que V no

depende de $\dot{\theta}_1$ o $\dot{\theta}_2$, la única posible complicación está en la energía cinética T . Sin embargo, observando su expresión en la ecuación 2.3.3, es fácil reescribirla, al tratarse de una forma cuadrática, como

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} M_L \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\mu_1, \mu_2] M_L^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

donde hemos usado que $M_L^T = M_L$ (ocurriendo lo mismo con las inversas) al ser esta simétrica. Invirtiendo M_L podemos obtener la expresión de $\{\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\}$ en función de $\{\mu_1, \mu_2\}$, de modo que tras simplificar:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{l_2 \mu_1 - l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \mu_2}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{l_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \mu_2 - l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \mu_1}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (2.3.19)$$

Como se aprecia, la relación entre velocidades $\{\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\}$ sobre el fibrado tangente y los momentos generalizados $\{\mu_1, \mu_2\}$ sobre el fibrado cotangente no es trivial, como en un principio pudiese parecer. Llegamos por fin a la siguiente expresión para el hamiltoniano H :

$$H = E \circ (\text{FL})^{-1} = \frac{l_2^2 \mu_1^2 + l_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \mu_2^2 - 2l_1 l_2 \mu_1 \mu_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - g(m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 - g m_2 l_2 \cos \theta_2 \quad (2.3.20)$$

A partir del hamiltoniano del sistema podemos utilizar las ecuaciones de Hamilton para obtener las condiciones de las curvas integrales del campo hamiltoniano X_H asociado:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = \frac{l_2 \mu_1 - l_1 \mu_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.3.21a)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = \frac{l_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \mu_2 - l_2 \mu_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.3.21b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = \frac{l_2^2 m_2 \mu_1^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) \mu_2^2 - 2l_1 l_2 \mu_1 \mu_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad - \frac{\mu_1 \mu_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (2.3.21c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -\frac{l_2^2 m_2 \mu_1^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) \mu_2^2 - 2l_1 l_2 \mu_1 \mu_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + \frac{\mu_1 \mu_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.3.21d)$$

Se comprueba que la expresión de $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ coincide con la de las expresiones 2.3.19. De nuevo, al igual que en el caso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, por lo que únicamente podremos resolverlo numéricamente.

En cuanto a la expresión del campo vectorial hamiltoniano X_H , tendremos de manera inmediata, siguiendo el Teorema 2.1.9,

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial \mu_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial H}{\partial \mu_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \mu_1} - \frac{\partial H}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \mu_2}, \quad (2.3.22)$$

donde el coeficiente asociado a cada elemento de la base se ha calculado en las ecuaciones 2.3.21. Calcularemos por último la acción G asociada a H , siguiendo la Proposición 2.2.4:

$$G = \theta_0(X_H) = \mu_1 d\theta_1(X_H) + \mu_2 d\theta_2(X_H) = \mu_1 \frac{\partial H}{\partial \mu_1} + \mu_2 \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = \frac{l_2^2 \mu_1^2 - 2l_1 l_2 \mu_1 \mu_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1^2 \left(a + \frac{m_1}{m_2}\right) \mu_2^2}{l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (2.3.23)$$

La relación de G con la acción lagrangiana A mediante $G = A \circ \text{FH} = A \circ (\text{FL})^{-1}$ es inmediata teniendo en cuenta que, viendo su expresión 2.3.7,

$$A = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} M_L \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.24)$$

y realizando un cambio de coordenadas como en la expresión 2.3.18.

Para terminar este ejemplo regresemos a las condiciones de las curvas integrales de los campos lagrangiano X_E y hamiltoniano X_H , respectivamente obtenidas en las expresiones 2.3.9 y 2.3.21. Como se comentó, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, acoplados y no lineales, no tienen en general solución

analítica. Por lo tanto, se debe recurrir a métodos numéricos para obtener las curvas integrales para parámetros y condiciones iniciales concretas. En la Figura 3 se muestra las curvas integrales en cada caso (separadas cada una en dos gráficas distintas debido a la dificultad de representar curvas con cuatro coordenadas en papel), para los parámetros y condiciones especificados en el pie de figura. Como se observa, la evolución $(\theta_1(t), \theta_2(t))$, en las gráficas inferiores, es la misma en los dos casos, como se demostró en el Teorema 2.2.3. Por su parte, $(\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t))$ y $(\mu_1(t), \mu_2(t))$ tienen comportamientos muy distintos, si bien relacionados por medio de la transformada de Legendre, concretamente mediante la ecuación 2.3.16.

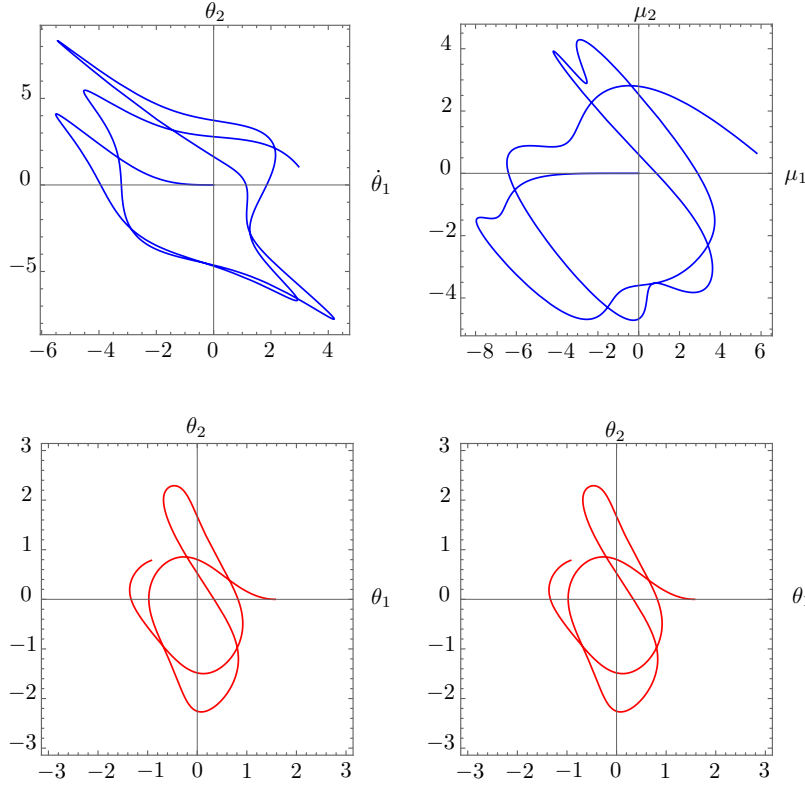


FIGURA 3. Curvas integrales $(\theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t))$ y $(\theta_1(t), \theta_2(t), \mu_1(t), \mu_2(t))$ obtenidas numéricamente para los campos X_E y X_H , respectivamente, para $t \in [0, 5]$ y condiciones iniciales $\theta_1(0) = \frac{\pi}{6}, \theta_2(0) = 0$ y $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \mu_1(0) = \mu_2(0) = 0$. El péndulo doble descrito por el sistema se ha tomado con $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1, g = 9,8$.

A la hora de intentar representar los campos vectoriales X_E y X_H , cuyas (ya de por sí complicadas) expresiones hemos obtenido en las ecuaciones 2.3.15 y 2.3.21, es fácil ver que es bastante más difícil que en el caso de las curvas integrales, al tenerse que $X_E \in \mathfrak{X}(T\mathbb{T}^2)$ y $X_H \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{T}^2)$, dependiendo tanto del punto $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$ como del de $T_{(\theta_1, \theta_2)}\mathbb{T}^2$ o $T^*_{(\theta_1, \theta_2)}\mathbb{T}^2$ sobre el que se aplican.

La resolución numérica de las ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton para este ejemplo, así las representaciones gráficas pertinentes en la Figura 3 y los cálculos intermedios se han comprobado a cabo con la ayuda de un cuaderno (*notebook*) de **Wolfram Mathematica**. Los comandos utilizados y resultados obtenidos aparecen recogidos en el Apéndice B.

Como curiosidad, el péndulo doble es uno de los sistemas más simples que presenta movimiento caótico, lo que intuitivamente se puede entender como que dos péndulos que comiencen su movimiento con condiciones iniciales o parámetros ligeramente distintos pueden acabar describiendo trayectorias muy distintas. Si bien no es el objetivo de este trabajo, este tipo de sistemas son estudiados por la *Teoría del Caos* y de *Sistemas Dinámicos*. Se remite a [Broer, 2009] y la Parte 3 de [Abraham, 1977] para más información al respecto. En lo referido a este ejemplo, el hecho de que estemos obteniendo las curvas integrales numéricamente, lleva a que para tiempos altos los valores de $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ obtenidos por la vía lagrangiana y hamiltoniana acaben divergiendo debido a la precisión finita con la que se trabaja, si bien este comportamiento caótico no emana de la resolución numérica de las ecuaciones del movimiento.

Geometría y Variedades Simplécticas

Índice

| | |
|---|-----------|
| 3.1. Álgebra Simpléctica | 25 |
| 3.1.1. Breves apuntes sobre volúmenes. Orientación * | 27 |
| 3.2. Geometría Simpléctica | 30 |
| 3.2.1. Breves apuntes sobre flujos* | 30 |
| 3.2.2. Conceptos básicos de Geometría Simpléctica | 32 |
| 3.3. Un par de resultados de Geometría Simpléctica | 35 |

En el anterior capítulo mostramos como la notación clásica de las ecuaciones de Hamilton (en el sentido dado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por la expresión 2.0.3) se extiende naturalmente a un espacio de configuración cualquiera dado por una variedad n -dimensional Q con sus momentos generalizados sobre sus espacios cotangentes, mediante una 2-forma canónica ω_0 sobre el fibrado cotangente $M = T^*Q$, entendido como variedad $2n$ -dimensional. Aparte de la relación con los campos hamiltonianos, ω_0 tiene importantes propiedades:

- Trivialmente, por ser una 2-forma, ω_0 es antisimétrica.
- Puesto que se obtiene a partir de la 1-forma canónica θ_0 como $\omega_0 = -d\theta_0$, $d\omega = -d^2\theta_0 = 0$, de modo que ω_0 es cerrada.
- Se vio que ω_0 es no degenerada.

Estas propiedades no son exclusivas de ω_0 , y de hecho se generalizan a variedades generales de dimensión par en lo que denominaremos *formas simplécticas*. Como se verá, será posible encontrar coordenadas locales en las cuales es posible expresar cualquier forma simpléctica en una expresión análoga a la de ω_0 en coordenadas canónicas.

Seguiremos para el desarrollo de este capítulo se han seguido las secciones 3.1 y 3.2 de [Abraham, 1977] para la descripción del álgebra y variedades simplécticas, la 2.1 del mismo libro para los resultados sobre flujos, y las 2.4 y 2.5 para los resultados sobre volúmenes y orientabilidad.

3.1. Álgebra Simpléctica

Antes de meternos de lleno en la Geometría Simpléctica, introduzcamos una serie de conceptos de la llamada *Álgebra Simpléctica* sobre \mathbb{R} -espacios vectoriales, que luego trasladaremos fácilmente al lenguaje de variedades a través de los espacios y fibrados tangentes.

En primer lugar, si bien ya lo hemos utilizado en el capítulo anterior, tenemos el siguiente concepto.

Definición 3.1.1. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial y $\omega \in L^2(V, V; \mathbb{R})$ una aplicación bilineal. Diremos que ω es no degenerada si

$$\omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow x = 0 \quad (3.1.1)$$

Teniendo en cuenta que definimos la *traspuesta* de ω , ω^t , como $\omega^t(x, y) = \omega(y, x)$, es inmediato que ω es no degenerada si y solo si no lo es ω^t , por la que la definición de no degeneración se cumple para primer y segundo factor. Dada una base ordenada $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ de V y $\mathcal{B}^* = \{e^i\}_{i \in I}$ de su espacio dual V^* , podremos expresar ω , utilizando el convenio de notación de Einstein, como

$$\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j, \quad \text{con } \omega_{ij} = \omega(e_i, e_j) \quad (3.1.2)$$

Por su parte, podemos definir la aplicación lineal $\omega^\flat : V \rightarrow V^*$, dada por

$$\begin{aligned} \omega^\flat(x) : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \omega(x, y) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Para espacios vectoriales de dimensión finita, es inmediato que es equivalente que ω sea no degenerada y que ω^\flat sea isomorfismo (basta ver que ω^\flat es inyectiva, al tratarse de aplicación lineal entre espacios vectoriales, V y V^* , de misma dimensión). Sin embargo, para espacios vectoriales de dimensión infinita, la fórmula de la dimensión no se puede aplicar, distinguiéndose entre los siguientes conceptos.

Definición 3.1.2. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión arbitraria, incluida infinita, y $\omega \in L^2(V, V; \mathbb{R})$. Diremos que ω es débilmente no degenerada si ω^\flat es inyectiva, y no degenerada si ω^\flat es isomorfismo. Si V tiene dimensión finita ambos conceptos coinciden.

Veamos ahora un resultado que nos servirá para comenzar a vislumbrar la relación entre una aplicación bilineal antisimétrica y no degenerada con la 2-forma canónica ω_0 definida en sistemas hamiltonianos.

Proposición 3.1.3. *Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión p , y $\omega \in L^2(V, V; \mathbb{R})$ una aplicación bilineal antisimétrica de rango r . Tendremos entonces que $r = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y que existirá una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^p$ de V , con base dual $\mathcal{B}^* = \{e^i\}_{i=1}^p$ tal que en ella*

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge e^{i+n} = \sum_{i=1}^n (e^i \otimes e^{i+n} - e^{i+n} \otimes e^i), \quad (3.1.4)$$

esto es, la matriz asociada a ω en dicha base será

$$\begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n & 0 \\ -\text{Id}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, por ser antisimétrica, $\omega \neq 0$ (que es simétrica). Podremos encontrar entonces dos vectores $\tilde{e}_1, \tilde{e}_{n+1} \in V$ tal que $\omega(\tilde{e}_1, \tilde{e}_{n+1}) \neq 0$. Dividiendo por constante si es necesario, tendremos entonces $e_1, e_{n+1} \in V$ tal que $\omega(e_1, e_{n+1}) = 1$. Por la antisimetricidad de ω , $\omega(e_{n+1}, e_1) = -1$, y $\omega(e_1, e_1) = \omega(e_{n+1}, e_{n+1}) = 0$. En el subespacio $V_1 := \langle \{e_1, e_{n+1}\} \rangle \subseteq V$ con la base $\{e_1, e_{n+1}\}$, la restricción $\omega|_{V_1}$ vendrá dada por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

Consideremos ahora su complemento ω -ortogonal,

$$V_1^{\perp\omega} = \{x \in V : \omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in V_1\} \quad (3.1.7)$$

De manera trivial $V_1 \cap V_1^{\perp\omega} = \{0\}$, y dado $z \in V$, podremos descomponerlo como

$$z = \underbrace{(\omega(z, e_{n+1})e_1 - \omega(z, e_1)e_{n+1})}_{\in V_1} + \underbrace{(z - \omega(z, e_{n+1})e_1 + \omega(z, e_1)e_{n+1})}_{\in V_1^{\perp\omega}} \quad (3.1.8)$$

pues,

$$\begin{aligned} \omega(z - \omega(z, e_{n+1})e_1 + \omega(z, e_1)e_{n+1}, e_1) &= \omega(z, e_1) - \omega(z, e_{n+1})\omega(e_1, e_1) + \omega(z, e_1)\omega(e_{n+1}, e_1) \\ &= \omega(z, e_1) - \omega(z, e_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

y de manera análoga se comprueba para e_{n+1} , por lo que

$$z - \omega(z, e_{n+1})e_1 + \omega(z, e_1)e_{n+1} \in V_1^{\perp\omega} \quad (3.1.10)$$

Por lo tanto $V = V_1 \oplus V_1^{\perp\omega}$. Podemos repetir el proceso, y encontrar $e_2, e_{n+1} \in V_1^{\perp\omega}$ tal que se comporten en $\hat{V}_2 := \langle \{e_2, e_{n+2}\} \rangle$ del mismo modo que e_1 y e_{n+1} en V_1 . Tomando ahora en $V_2 := V_1 \oplus V_2$ la base $\{e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2}\}$, $\omega|_{V_2}$ vendrá dada por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_2 \\ -\text{Id}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

Continuamos el proceso hasta tener $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp\omega}$ y no podamos tomar más pares $x, y \in V_n^{\perp\omega}$ con $\omega(x, y) \neq 0$. Completamos la base \mathcal{B} de V con una base de $V_n^{\perp\omega}$. La matriz de ω en la base \mathcal{B} será entonces de la forma deseada. Es inmediato entonces que el rango de ω es par.

Por último es inmediato que dada una aplicación bilineal que en la base \mathcal{B} $\hat{\omega}$ está por la expresión 3.1.4, entonces sus coeficientes serán

$$\hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega}(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n (e^k \otimes e^{k+n} - e^{k+n} \otimes e^k)(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n (\delta_i^k \delta_j^{k+n} - \delta_i^{k+n} \delta_j^k) = \delta_j^{i+n} - \delta_i^{j+n} \quad (3.1.12)$$

que se corresponde con los coeficientes de la matriz de ω en \mathcal{B} , de modo que $\omega = \hat{\omega}$. \square

En caso además de estar trabajando con una aplicación bilineal antisimétrica no degenerada ω en un \mathbb{R} -espacio vectorial V de dimensión m finita, tendremos que, puesto que ω sea no degenerada implica ω^\flat sea isomorfismo, y por tanto la matriz asociada tenga rango máximo, a la fuerza $m = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y existirá una base ordenada $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{2n}$ tal que en dicha base, la matriz de ω como aplicación bilineal sea

$$\begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.13)$$

del mismo modo que la 2-forma canónica ω_0 introducida en el fibrado tangente TQ de una variedad Q en el capítulo anterior.

3.1.1. Breves apuntes sobre volúmenes. Orientación *. Del mismo modo que la Geometría Riemanniana tiene como pieza fundamental el tensor métrico o primera forma fundamental, que permite el cálculo de ángulos y distancias sobre variedades diferenciables, la Geometría Simpléctica se puede entender entorno a la idea de área orientada (con signo) y su conservación por aplicaciones, así como a la orientabilidad de variedades. En la Figura 4 se aprecia cómo para una variedad diferenciable M de dimensión 2, la forma simpléctica $\omega = dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$ devuelve el área (con signo) del paralelogramo determinado por dos vectores u y v de un espacio tangente $T_p M$ al ser aplicada sobre estos.

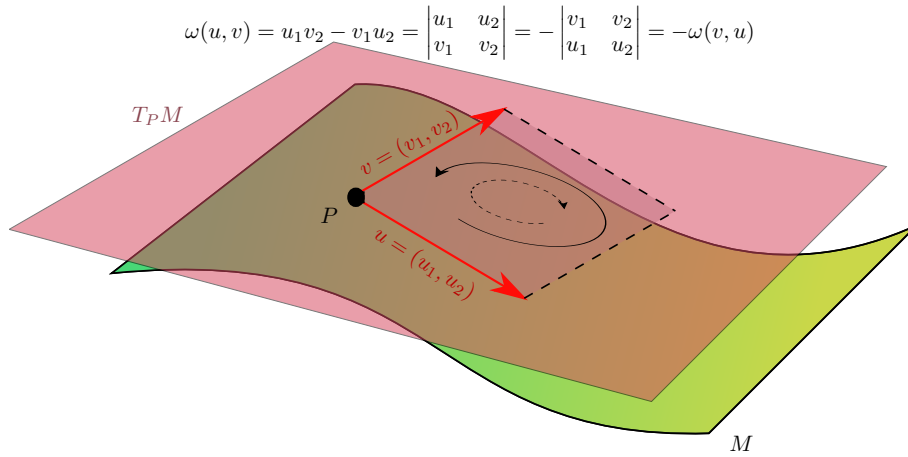


FIGURA 4. Visión esquemática de cómo la forma simpléctica ω se aplica sobre pares de elementos de $u, v \in TM$ para obtener el área (orientada) del paralelogramo determinado por estos dos elementos.

Introduzcamos ahora algunos conceptos básicos de Cálculo Exterior al respecto.

Definición 3.1.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Se llama volumen a cualquier n -forma diferencial $\Omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\Omega(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Se dice que M es orientable si se puede definir un volumen sobre ella.

A partir de esta definición de volumen y orientabilidad podemos precisar los siguientes conceptos:

Definición 3.1.5. Sea M una variedad diferenciable orientable. Dos volúmenes Ω_1 y Ω_2 definidos sobre ella se dicen equivalentes si existe una función $f \in \mathcal{F}(M) : f(x) > 0 \forall x \in M$ de modo que en todo punto $\Omega_2 = f\Omega_1$. Tratándose inmediatamente esta de una relación de equivalencia, decimos que cada clase $[\Omega]$ de volúmenes equivalentes define una orientación en M . El par $(M, [\Omega])$ se dice variedad orientada.

Dada una orientación $[\Omega]$, se define la orientación opuesta como la clase $[-\Omega]$ (obviamente distinta de $[\Omega]$).

Se puede demostrar que la noción de orientabilidad $[\Omega]$ dada por una forma de volumen $\Omega \in \Omega^n(M)$ es análoga a la definida en topología mediante complejos simpliciales, ya que dada una expresión $\Omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $\{x^1, \dots, x^n\}$ describe un orden para recorrer los bordes de los diferentes simples (ver Capítulos 13 y 16 de [Lee, 2003]).

Al igual que con la definición de orientación “simplicial”, el número de orientaciones distintas está bastante limitado.

Teorema 3.1.6. Sea M una variedad orientable. M es conexa sii solo se existen dos únicas orientaciones sobre M .

DEMOSTRACIÓN.

\Rightarrow) Supongamos que M es conexa. Sean Ω_1 y Ω_2 dos volúmenes sobre M . Como no se anulan en ningún punto y toman valores sobre \mathbb{R} “suavemente”, podemos encontrar una función

$h \in \mathcal{F}(M)$ que los relacione como $\Omega_1 = h\Omega_2$. De nuevo, puesto que h no se anula y M es compacto, o bien $h^{-1}(M) \subseteq (0, +\infty)$ ($[\Omega_1] = [\Omega_2]$) o bien $h^{-1}(M) \subseteq (-\infty, 0)$ ($[\Omega_1] = [-\Omega_2]$).

\Leftrightarrow) Probemos por contrarrecíproco. Sea $U \subset M$ una componente conexa de M , esto es, un subconjunto de esta tal que $U \neq \emptyset, M$ y simultáneamente abierto y cerrado. Dado un volumen Ω_1 en M , definimos

$$\Omega_2(x) = \begin{cases} \Omega_1(x) & \text{si } x \in U \\ -\Omega_1(x) & \text{si } x \notin U \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Es inmediato que Ω_2 es un volumen sobre M , pues no se anula sobre ningún punto. Por otro lado, es inmediato que si M es no conexa y tiene otras componentes conexas aparte de U , $[\Omega_2] \neq [\Omega_1], [-\Omega_1]$, por lo que existirían más de dos orientaciones (de hecho si M tiene n componentes conexas, es inmediato que existirán 2^n orientaciones). Por lo tanto, si sobre M se pueden definir únicamente dos orientaciones, M será conexo. \square

Considerando la estructura trivial de los \mathbb{R} -espacios vectoriales como variedades diferenciables reales, podemos trasladar el concepto de volumen a estos.

Proposición 3.1.7. *Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, y $\omega \in \Omega^2(V)$. Entonces se tiene que ω es no degenerada sii $\dim V = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\omega^n := \omega \wedge \dots \wedge \omega$ es un volumen sobre V .*

DEMOSTRACIÓN.

\Rightarrow) Sabemos que como $\omega \in \Omega^2(V)$, es antisimétrica. Supongamos además que es no degenerada. Por la Proposición 3.1.3, $\dim V = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y existirá una base ordenada $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{2n}$ tal que sobre su base dual \mathcal{B}^* ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge e^{i+n} \quad (3.1.15)$$

Por la bilinearidad de \wedge , es inmediato que

$$\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n e^{j_1} \wedge e^{j_1+n} \wedge \dots \wedge e^{j_n} \wedge e^{j_n+n} \quad (3.1.16)$$

Aplicando las propiedades de anticonmutatividad de \wedge , puesto que $e^i \in V^* = \Omega^1(V)$, $e^i \wedge e^j = (-1)^{1+1} e^j \wedge e^i = e^j \wedge e^i$. Usando a su vez la asociatividad de \wedge podremos reordenar los factores de cada sumando. Sin embargo, tenemos que todos los sumandos con j_i repetidos se anulan, pues podríamos reordenarlos hasta tener un factor $e^{j_i} \wedge e^{j_i} = e^{j_i} \otimes e^{j_i} - e^{j_i} \otimes e^{j_i} = 0$. Tendremos entonces $n!$ sumandos (formas distintas de coger valores para los j_i entre 1 y n sin repetir), de modo que

$$\omega^n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} e^{\sigma(1)} \wedge e^{\sigma(1)+n} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \wedge e^{\sigma(n)+n}, \quad (3.1.17)$$

Ahora bien, para reordenar la $2n$ -upla $(\sigma(1), \sigma(1) + n, \dots, \sigma(n), \sigma(n) + n)$ a $(\sigma(1), \dots, \sigma(n), \sigma(1) + n, \dots, \sigma(n) + n)$ es necesario realizar $\sum_{i=1}^{n-1} i$ transposiciones, ya que $\sigma(i)$ estará en la posición $2i - 1$ -ésima, y queremos llevarla a la i -ésima. Por lo tanto

$$\omega^n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \wedge e^{\sigma(1)+n} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)+n}, \quad (3.1.18)$$

donde hemos usado que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\frac{n(n-1)}{2}$ tiene la misma paridad. Ahora bien, la permutación que lleva $(\sigma(1), \dots, \sigma(n), \sigma(1) + n, \dots, \sigma(n) + n)$ a $(1, \dots, 2n)$ tiene siempre el índice par, pues se realiza el mismo número de transposiciones al llevar $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ a $(1, \dots, n)$ que $(\sigma(1) + n, \dots, \sigma(n) + n)$ a $(n+1, \dots, 2n)$. Por lo tanto podremos escribir

$$\omega^n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n! e^1 \wedge \dots \wedge e^{2n}, \quad (3.1.19)$$

siendo evidente que $\omega^n \in \Omega^n(M)$ y que por su expresión no se anula en ningún punto, tratándose un volumen.

\Leftrightarrow) Por otra parte, si $\dim V = 2n$ y ω^n es un volumen, entonces, por definición no puede anularse en ningún punto. Por reducción al absurdo, supongamos que ω es degenerada. Por la Proposición 3.1.3, como ω es antisimétrica, existirá una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{2n}$ con base dual $\mathcal{B}^* = \{e^i\}_{i=1}^{2n}$ de modo que para algún $r \in \mathbb{N}$ con $2r < 2n$,

$$\omega = \sum_{i=1}^r e^i \wedge e^{i+n} \quad (3.1.20)$$

Por otro lado, la forma ω^n se expresará como

$$\omega^n = \left(\sum_{i_1=1}^r e^{i_1} \wedge e^{i_1+n} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^r e^{i_n} \wedge e^{i_n+n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^r e^{i_1} \wedge e^{i_1+n} \wedge \dots \wedge e^{i_n} \wedge e^{i_n+n} \quad (3.1.21)$$

Como $2r < 2n$, entre los $2n$ términos de $e^{i_1} \wedge e^{i_1+n} \wedge \dots \wedge e^{i_n} \wedge e^{i_n+n}$ habrá elementos repetidos, de modo que se anularán todos los sumandos de la expresión 3.1.21, y por tanto $\omega^n = 0$ en todo punto. Puesto que esto no es posible al ser ω^n forma de volumen, se llega a que ω debe ser no degenerada (y así $2r = 2n$). \square

Trivialmente se extiende estos conceptos a variedades diferenciables.

Definición 3.1.8. Sea M una variedad diferenciable, se dice que $\omega \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es no degenerada si $\omega(x)$ no es degenerada para todo $x \in M$.

Es inmediata la extensión a variedades de la proposición 3.1.7:

Proposición 3.1.9. Sea M una variedad diferenciable, y sea $\omega \in \Omega^2(M)$. Se tiene que ω es no degenerada sii $\dim M = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ es un volumen sobre M . Por lo tanto, la variedad M será orientable si es no degenerada. Se introduce el volumen estándar sobre M asociado a ω como

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega^n \quad (3.1.22)$$

Como corolario tenemos un importante resultado:

Corolario 3.1.10. Dada una variedad diferenciable cualquiera M , sus fibrados tangente y cotangente, TM y T^*M , entendidos como variedades diferenciables con $\dim TM = \dim T^*M = 2 \dim M$, son siempre orientables (incluso si M no lo es).

DEMOSTRACIÓN. En el capítulo anterior se definió sobre T^*M la 2-forma canónica ω_0 y sobre TM la 2-forma de Lagrange $\omega_L = (FL)^* \omega_0$. Se vio que ω_0 es antisimétrica y no degenerada, por lo que también lo será ω_L . Se podrán definir los respectivos volúmenes asociados, Ω_{ω_0} y Ω_{ω_L} sobre T^*M y TM , que serán así orientables. \square

Introduzcamos por fin, después de casi cuatro páginas, el concepto central del capítulo.

Definición 3.1.11. Una 2-forma no degenerada $\omega \in \Omega^2(V)$ sobre un \mathbb{R} -espacio vectorial V (que como hemos visto ha de tener dimensión par) se dice forma simpléctica. El par (V, ω) se denomina espacio vectorial simpléctico. Una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales simplécticos (V, ω) y (W, ρ) se dice simpléctica si $f^* \rho = \omega$.

Por último, sobre (V, ω) , se define la orientación estándar dada por el siguiente elemento de volumen:

$$\Omega_\omega = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega^n \quad (3.1.23)$$

Terminamos esta sección con un importante resultado sobre volúmenes.

Proposición 3.1.12. Sean (V, ω) y (W, ρ) dos \mathbb{R} -espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión $2n$, y $f : V \rightarrow W$ una aplicación simpléctica. Entonces f preserva volúmenes (y por tanto orientación). De hecho f es isomorfismo de espacios vectoriales.

DEMOSTRACIÓN. Dado Ω_ω el volumen estándar sobre (W, ρ) , tendremos dado un volumen Ω cualquiera o bien $[\Omega] = [\Omega_\rho]$ o $[\Omega] = [-\Omega_\rho]$, de modo que existirá una función a sobre W positiva o negativa en todo punto tal que $\Omega = a\Omega_\rho$. Por lo tanto sobre cada punto $x \in W$ Ω se puede expresar como Ω_ρ salvo

una constante. Bastará comprobar este resultado sobre los volúmenes estándar. Basta operar y aplicar que f^* es lineal y se comporta bien con el producto exterior \wedge :

$$f^*\Omega_\rho = f^*\left(\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \rho \wedge \dots \wedge \rho\right) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} f^*\rho \wedge \dots \wedge f^*\rho = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega^n = \Omega_\omega \quad (3.1.24)$$

Por lo tanto f preserva el volumen, enviando $a\Omega_\rho$ a $a\Omega_\omega$, y por tanto la orientación, pues $[f^*\Omega_\rho] = [\Omega_\omega]$. Si, por reducción al absurdo, f no fuese isomorfismo, entonces $\ker f \neq \{0\}$ y existiría un $v_0 \in V\{0\}$ tal que $f(v_0) = 0$. Si, aplicando la definición de aplicación codiferencial y de aplicación simpléctica

$$(f^*\rho)(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) = \omega(x_1, x_2), \quad (3.1.25)$$

como $v_0 \neq 0$ y ω es no degenerada, existirá v_1 tal que $\omega(v_0, v_1) \neq 0$. Entonces

$$0 \neq \omega(v_0, v_1) = (f^*\rho)(v_0, v_1) = \rho(f(v_0), f(v_1)) = \rho(0, f(v_1)) = 0, \quad (3.1.26)$$

llegándose a un absurdo. Por tanto f es isomorfismo. \square

3.2. Geometría Simpléctica

3.2.1. Breves apuntes sobre flujos*. El objetivo último de la Mecánica es estudiar la evolución de sistemas físicos con el tiempo. Como se introdujo en el Capítulo 1, se puede entender el tiempo como un parámetro real t que nos permite, a través de la relación de orden convencional definida en \mathbb{R} , ordenar eventos como posteriores o anteriores entre sí. La disciplina matemática de *Teoría de Sistemas Dinámicos* trata de estudiar la evolución de los estados que toma un sistema, normalmente gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales, con el tiempo. Tiene así gran importancia el concepto de *flujo*, cuyas propiedades más básicas enunciaremos a continuación.

Definición 3.2.1. Dado un conjunto X cualquiera, se denomina flujo a cualquier acción del grupo $(\mathbb{R}, +)$ sobre X , esto es, una aplicación

$$\begin{aligned} F : X \times \mathbb{R} &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto F_t x \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

- $F_0 = \text{Id}_X$
- $F_t \circ F_s = F_{t+s}, \forall t, s \in \mathbb{R}$

En el contexto de sistemas dinámicos sobre una variedad diferenciable M , se puede entender el flujo asociado a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ como los valores que toman curvas integrales de X , parametrizadas por el parámetro t . Recordemos el concepto de curva integral y su resultado de existencia y unicidad, que por cuestiones de espacio no demostraremos aquí.

Definición 3.2.2. Sea M una variedad diferenciable y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice curva integral de X a una curva diferenciable $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $c'(t) = X(c(t)) \forall t \in I$. Si $0 \in I$ y $m = c(0)$, diremos que c pasa por m .

Teorema 3.2.3. Sea M una variedad diferenciable, un abierto $U \subseteq M$ de esta y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(U)$. Entonces, para todo $x_0 \in U$ se tiene que:

- I) Existe una curva $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq M$ pasando por x_0 tal que $c'(t) = X(c(t)) \forall t \in I$ (Existencia). Dada otra curva $\tilde{c} : \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq M$ que también pase por x_0 y $\tilde{c}'(t) = X(\tilde{c}(t)) \forall t \in \tilde{I}$, se cumple que $c|_{I \cap \tilde{I}} = \tilde{c}|_{I \cap \tilde{I}}$ (Unicidad).
- II) Existe un entorno abierto U_0 de x_0 , un número real $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $F : U_0 \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, tal que

$$\begin{aligned} c_u : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\ \lambda &\longmapsto F(u, \lambda) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

es una curva integral de X pasando por u .

Podemos demostrar fácilmente la unicidad de las curvas integrales globalmente, sin necesidad de restringirnos a cartas locales, como ocurre en el Teorema 3.2.3.

Proposición 3.2.4. Sea M variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, y $c_1 : I_1 \rightarrow M$ y $c_2 : I_2 \rightarrow M$ dos curvas integrales de X en $m \in M$. Entonces $c|_{I_1 \cap I_2} = \tilde{c}|_{I_1 \cap I_2}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I := I_1 \cap I_2$, y sea $K := \{t \in I : c_1(t) = c_2(t)\}$, inmediatamente cerrado en I con la topología del subespacio al ser c_1 y c_2 continuas y M Hausdorff. Por otro lado, como tanto c_1 como c_2 pasan por m , por el Teorema 3.2.3 coincidirán para los valores de t en cierto entorno del 0, que estará contenido en K . Podemos trasladar este hecho a cualquier punto λ de I , ya que definiendo

$$c_1^\lambda(t) := c_1(t + \lambda), \quad c_2^\lambda(t) := c_2(t + \lambda) \quad (3.2.3)$$

se tiene que c_1^λ y c_2^λ serán curvas integrales de X en $c_1(\lambda) = c_2(\lambda)$, de modo que coincidirán en un entorno abierto del 0, y c_1 y c_2 lo harán en uno de λ . Por lo tanto K es abierto. Como $K \subseteq I$ es abierto y cerrado, e I es conexo al ser la intersección de dos intervalos de \mathbb{R} , se tiene que $K = I$, y c_1 y c_2 coinciden en todo punto de la intersección de sus dominios. \square

De esta manera se puede interpretar como un sistema en un cierto estado evoluciona en el tiempo a otros estados siguiendo la curva integral dada por el flujo F . Esta noción se puede generalizar de puntos de M a abiertos de esta, estableciéndose una suerte de continuidad, de modo que puntos cercanos en un momento dado evolucionarán de manera similar para tiempos pequeños. Se introduce así la noción de *flow box*^a

Definición 3.2.5. Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre ella. Denominamos *flow box* de X en $m \in M$ a la terna (U, ϵ, F) , con

- I) $U \subseteq M$ un entorno abierto de m y $\epsilon \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$.
- II) $F : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ diferenciable \mathcal{C}^∞ .
- III) Para cualquier $u \in U$, se tiene que

$$\begin{aligned} c_u : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\ \lambda &\longmapsto F(u, \lambda) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

es curva integral de X pasando por u .

- IV) Definiendo

$$\begin{aligned} F_\lambda : U_0 &\rightarrow M \\ u &\mapsto F(u, \lambda) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

se tiene que $F_\lambda(U)$ es abierto y F_λ es difeomorfismo de U a $F_\lambda(U)$ para todo $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Aplicando la Proposición 3.2.4 se tiene de manera inmediata que la aplicación F de las flow boxes es justamente un flujo. Veamos ahora las condiciones de existencia y unicidad de las flow boxes.

Teorema 3.2.6 (Existencia). Sea M una variedad diferenciable. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $m \in M$ existe una *flow box* de X en m .

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.2.3.(II) tenemos la existencia de una terna (U, ϵ, F) que cumple las propiedades (I)-(III) de la definición de flow box. Demostremos por tanto que cumple (IV), esto es, que F_λ es un difeomorfismo sobre su imagen para todo $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$. Como $F_\lambda \circ F_{-\lambda} = F_{-\lambda} \circ F_\lambda = \text{Id}_M$, tenemos que F_λ tiene inversa diferenciable siempre, pues el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ es simétrico. Ahora, como $F_\lambda(U) = (F_{-\lambda})^{-1}(U)$ y F_λ es continuo para todo $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$, $F_\lambda(U)$ es abierto. Por lo tanto F_λ es difeomorfismo entre abiertos. \square

Teorema 3.2.7 (Unicidad). Sea M variedad diferenciable y sean (U, ϵ, F) y (U', ϵ', F') dos *flow boxes* sobre un punto $m \in M$ para cierto campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces F y F' coinciden sobre la intersección de sus dominios, $(U \cap U') \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap (-\epsilon', \epsilon'))$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I = (-\epsilon, \epsilon) \cap (-\epsilon', \epsilon')$ y $u \in U \cap U'$ cualquiera. Por definición de flow box, $F|_{\{u\} \times I}$ y $F'|_{\{u\} \times I}$ son curvas integrales de X que pasan por u . Por la Proposición 3.2.4 se tiene que $F|_{\{u\} \times I} = F'|_{\{u\} \times I}$. Como esto ocurre para todo $u \in U \cap U'$, se tiene que F y F' coinciden sobre $(U \cap U') \times I$. \square

Como se ha visto, las nociones de existencia y unicidad de las flow boxes son locales, de modo que el flujo es un concepto local, pudiéndose definir para entornos abiertos de cualquier punto de la variedad.

Introducimos ahora, sin demostración, la relación entre flujos y la derivada de Lie de k -formas:

Teorema 3.2.8. *Sea M una variedad diferenciable, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un flujo F asociado. Dada ω una forma diferencial cualquiera, se tiene*

$$\frac{d}{d\lambda} F_\lambda^* \omega = F_\lambda^* \mathcal{L}_X \omega \quad (3.2.6)$$

Esta expresión funciona para cualquier tipo de tensor, pero puesto que en este trabajo solo harán falta las derivadas de Lie de formas diferenciales, basta con considerar este caso.

El último concepto a introducir en esta subsección es el de *campo vectorial independiente del tiempo*, utilizado para describir sistemas no autónomos, esto es, con interacción exterior, de modo que las “leyes” que describen su evolución cambian en el tiempo.

Definición 3.2.9. *Dada M una variedad diferenciable, denominamos campo vectorial dependiente del tiempo sobre M a una aplicación $X : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ tal que $X(m, t) \in T_m M$ para todo $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$.*

Definiendo $F_{t,s}(m)$ como la curva integral de X_t tal que en $t = s$ comienza en m , esto es, solución de

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X_t(F_{t,s}(m)), \quad \text{con } F_{s,s}(m) = m, \quad (3.2.7)$$

se llama a $F_{t,s}$ al flujo dependiente del tiempo de X_t , cumpliendo las siguientes propiedades:

- I) $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{t,r}, \forall t, s, r \in \mathbb{R}$
- II) $F_{s,s} = \text{Id}_M$

No demostraremos tampoco, pero la versión análoga del Teorema 3.2.8 indica

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}^* \omega = F_{t,s}^* \mathcal{L}_{X_t} \omega \quad (3.2.8)$$

para ω cualquier forma (de hecho tensor) en M .

Terminaremos estos apuntes sobre flujos con un resultado técnico que no demostraremos, pero que nos será de utilidad en la demostración del Teorema de Darboux (3.2.11).

Proposición 3.2.10. *Sea X_t un campo vectorial dependiente del tiempo sobre \mathbb{R}^n . Entonces existe una bola alrededor del origen tal que en ella el flujo $F_{t,0}$ asociado a X_t está definido para $t \in [-1, 1]$*

^aAl no haberse encontrado traducción al castellano de *flow box*, concepto por otra parte no demasiado extendido, se ha decidido mantener la nomenclatura en inglés.

3.2.2. Conceptos básicos de Geometría Simpléctica. En la sección anterior se introdujo la noción de forma simpléctica, que generalizaba las 2-formas canónicas y de Lagrange del anterior capítulo, para espacios vectoriales. Es natural tratar ahora de extenderlas a variedades diferenciables, dando pie a la conocida como *Geometría Simpléctica*. Surge entonces la dificultad de encontrar cartas para las cuales la expresión introducida en la Proposición 3.1.3 sea válida.

Es el *Teorema de Darboux* ([Darboux, 1882]) el que nos da las condiciones para hacer esto, aparte de obtener como corolario un importante resultado de la Geometría Simpléctica. Puesto que la prueba original de Darboux se hace a través de una complicada sucesión de sistemas de ecuaciones diferenciales, se presentará la demostración dada por J. Moser en 1965, y que se puede encontrar en la *Lecture 5* de [Weinstein, 1977], más breve, y que hace uso del Lema de Poincaré (A.2.6), demostrado en el Apéndice A.

Teorema 3.2.11 (de Darboux). *Sea ω una 2-forma no degenerada sobre una variedad diferenciable M de dimensión $2n$. Entonces ω es cerrada ($d\omega = 0$) sii para todo $x \in M$ existe una carta (ϕ_x, U_x) tal que $\phi(x) = 0$, y si para todo $u \in U$, $\phi_x(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u), y^1(u), \dots, y^n(u))$, entonces*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i \quad (3.2.9)$$

DEMOSTRACIÓN.

\Rightarrow) Bastará encontrar una carta en la que ω sea constante, no en el sentido de que sea aplicación constante, sino que sea la misma aplicación para todos los puntos del dominio de dicha carta, y aplicar la Proposición 3.1.3. Por la naturalidad de las diferencial exterior d respecto a aplicaciones diferenciables, podremos usar las cartas para trabajar en \mathbb{R}^{2n} , y suponer que $x = 0$, lo cual no supone un problema al utilizar una carta distinta por cada punto de M .

Sea entonces $\omega_1 := \omega(0)$ una 2-forma constante, y definamos

$$\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega, \quad \omega_t = \omega + t\tilde{\omega} = (1-t)\omega + t\omega(0), \quad t \in [0, 1] \quad (3.2.10)$$

Es inmediato que $\omega_t(0) = \omega(0)$ es no degenerado para todo $t \in [0, 1]$, por lo que existirá un entorno abierto de 0 tal que ω_t es no degenerado para todo $t \in [0, 1]$, y por tanto $\tilde{\omega}$ tampoco lo es. Considerando una bola U dentro de dicho entorno que contenga al 0, como $d\tilde{\omega} = d\omega_1 - d\omega = 0$, por el Lema de Poincaré existirá $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $\tilde{\omega} = d\alpha$, pudiendo suponer que $\alpha(0) = 0$ (bastaría redefinir $\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha(0)$).

Puesto que ω_t es no degenerada, podemos definir el campo $X_t \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $\iota_{X_t}\omega_t = -\alpha$, con condición inicial $X_t(0) = 0$. Por el Teorema 3.2.3, habrá un entorno abierto U' alrededor del 0 que, por la Proposición 3.2.10, contiene a una bola en el que el flujo asociado a X_t , F_t , está definido al menos para $t \in [0, 1]$, con la condición inicial usual $F_0 = \text{Id}_U$. Aplicando la relación entre flujo y derivada de Lie (Proposición 3.2.8), tendremos, teniendo en cuenta que tanto F_t como ω_t dependen de t ,

$$\frac{d}{dt}(F_t^*\omega_t) = F_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + F_t^*\frac{d}{dt}\omega_t = F_t^*(d(\iota_{X_t}\omega_t) + \iota_{X_t}(d\omega_t)) + F_t^*\tilde{\omega} = F_t^*(-d\alpha + \tilde{\omega}) = 0 \quad (3.2.11)$$

donde hemos usado que $\iota_{X_t}(d\omega_t) = \iota_{X_t}[(1-t)d\omega + t d\omega(0)] = 0$, al ser ω cerrada por hipótesis y $\omega(0)$ constante. Como entonces $F_t^*\omega_t$ es constante para todo $t \in [0, 1]$, se tiene que $\omega = \omega_0 = \text{Id}_M^*\omega_0 = F_0^*\omega_0 = F_1^*\omega_1$, de modo que mediante F_1^* se puede pasar de ω a la forma constante ω_1 , que, como habíamos visto por la Proposición 3.1.3, se podrá escribir con la expresión deseada.

\Leftarrow) De manera inmediata $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ es cerrada, aplicando que d es una antiderivación con \wedge y que $d \circ d = 0$.

□

Una vez dada la condición para la existencia de estas caras, podemos introducir la definición clave de este capítulo:

Definición 3.2.12. *Dada una variedad diferenciable M (por fuerza de dimensión $2n$, par), una 2-forma cerrada y no degenerada ω se dice forma simpléctica. El par (M, ω) se dice entonces variedad simpléctica, sobre la cual se define la forma de volumen*

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega^n \quad (3.2.12)$$

Las cartas cuya existencia viene asegurada por el Teorema de Darboux se conocen como cartas simplécticas. Sus componentes coordinadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ se denominan coordenadas canónicas, en las cuales

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i, \quad \Omega_\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \quad (3.2.13)$$

Equivalentemente a como hicimos sobre espacios vectoriales, nos interesarán aquellas aplicaciones que se comporten bien con las formas simplécticas:

Definición 3.2.13. *Sean (M, ω) y (N, ρ) dos variedades simplécticas, y $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Diremos que F es una aplicación simpléctica o transformación canónica si $F^*\rho = \omega$.*

De modo análogo a como teníamos para espacios vectoriales, las aplicaciones simplécticas se comportan bien con las formas de volumen:

Proposición 3.2.14. *Sean (M, ω) y (N, ρ) dos variedades simplécticas, y $F : M \rightarrow N$ una aplicación simpléctica. Entonces F conserva volúmenes (esto es, $F^*\Omega_\rho = \Omega_\omega$) y es difeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. La conservación del volumen es trivial aplicando que F^* es homomorfismo de álgebras exteriores (Proposición A.2.3):

$$F^*\Omega_\rho = F^* \left[\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \rho^n \right] = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} F^*\rho \wedge \dots \wedge F^*\rho = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \Omega_\omega \quad (3.2.14)$$

Por otro lado, por simplicidad para la demostración, denominemos las cartas coordinadas de M como $\{x^i\}_{i=1}^{2n}$ y las de N como $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^{2n}$. Por definición de aplicación cotangente,

$$F^*d\tilde{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = d\tilde{x}^i \left(F_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = d\tilde{x}^i \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \right) = \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \delta_k^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}, \quad (3.2.15)$$

donde $F^i = \tilde{x}^i \circ F$. De este modo,

$$F^* d\tilde{x}^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \quad (3.2.16)$$

Ahora, aplicando sobre Ω_ρ , expresado en coordenadas canónicas,

$$\begin{aligned} F^* \Omega_\rho &= F^*(d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{2n}) = F^* d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge F^* d\tilde{x}^{2n} \\ &= \frac{\partial F^1}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial F^{2n}}{\partial x^{j_{2n}}} dx^{j_{2n}} = \frac{\partial F^1}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{2n}}{\partial x^{j_{2n}}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{2n}} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Por antisimetricidad, únicamente serán no nulas aquellas combinaciones de índices j_i en la que todos sean diferentes. Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} F^* \Omega_\rho &= \sum_{\sigma \in S_{2n}} I(\sigma) \frac{\partial F^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial F^{2n}}{\partial x^{\sigma(2n)}} dx^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma(2n)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_{2n}} I(\sigma) \frac{\partial F^1}{\partial x^{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial F^{2n}}{\partial x^{\sigma(2n)}} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n} = \det J_F dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n} = \det J_F \Omega_\omega, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

donde hemos utilizado que al tratarse de 1-formas podemos reordenar sin problema los factores dx^i , así como la definición de determinante. Sin embargo, por ser F simpléctica, tenemos que $F^* \Omega_\rho = \Omega_\omega$, por lo que $\det J_F = 1$ en todo punto y por tanto F es difeomorfismo. \square

Hasta ahora, en esta sección hemos visto en esta sección que las formas simplécticas se definen sobre variedades diferenciables de dimensión par. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, es de especial interés para sistemas mecánicos la formulación sobre el fibrado cotangente T^*Q , donde la variedad subyacente Q (o espacio de configuraciones) describe el conjunto de posibles posiciones del sistema, mientras que el espacio cotangente T_q^*Q muestra todos los posibles momentos para la posición $q \in Q$. Se vio cómo hay una forma canónica estándar, que ahora identificamos como simpléctica, y fuimos capaces de expresarla en coordenadas locales. A continuación mostraremos la existencia y comportamiento de esta con una formulación libre de coordenadas, basándonos en las propiedades de los fibrados (co)tangentes, válido incluso para variedades diferenciables de dimensión no finita.

Teorema 3.2.15. *Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n y $M = T^*Q$ su fibrado cotangente entendido como variedad diferenciable. Siendo $\pi_Q^* : M \rightarrow Q$ la proyección natural, consideramos $(\pi_Q^*)_* : TM \rightarrow TQ$, que envía vectores sobre $M = T^*Q$ a vectores sobre Q . Dado $q \in Q$, sea $\alpha_q \in M$ (con $\pi_Q^*(\alpha_q) = q$), y a su vez $\omega_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}M \subseteq TM$. Definamos ahora las siguientes aplicaciones:*

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha_q} : T_{\alpha_q}M &\rightarrow \mathbb{R} & \theta_0 : M &\rightarrow T^*M \\ \omega_{\alpha_q} &\mapsto \alpha_q((\pi_Q^*)_*(\omega_{\alpha_q})) & \alpha_q &\mapsto \theta_{\alpha_q} \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Se tiene entonces $\theta_0 \in \mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$, y $\omega_0 := -d\theta_0$ es una forma simpléctica sobre M . Se conoce a θ_0 y ω_0 como formas canónicas sobre $M = T^*Q$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato por definición que θ_0 es una sección de T^*M , por lo que faltará ver que es diferenciable. Sea (ϕ, U) una carta sobre Q con $U' := \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, y tomemos las siguientes cartas inducidas:

- (ϕ^*, T^*U) sobre $T^*Q = M$, donde $\phi^* : T^*U \rightarrow U' \times (\mathbb{R}^n)^*$.
- $((\phi^*)_*, TT^*U)$ sobre $TT^*Q = TM$, donde $(\phi^*)_* : TT^*U \rightarrow U' \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$.
- (ϕ^{**}, T^*T^*U) sobre $T^*T^*Q = T^*M$, donde $\phi^{**} : T^*T^*U \rightarrow U' \times (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^{**}$.

Dado un $q \in Q$ como en el enunciado del teorema, denotaremos $\phi(q) = x \in U'$, $\phi^*(\alpha_q) = (x, \alpha)$ y $(\phi^*)_*(\omega_{\alpha_q}) = (x, \alpha, e, \beta)$. Si $\pi_1 : U' \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow U'$ es la proyección sobre el primer término, podremos operar de la siguiente manera:

$$(\phi^{**} \circ \theta_0 \circ (\phi^*)^{-1})(\alpha)(e, \beta) = \phi^{**}(\theta_{\alpha_q})(e, \beta) = \theta_{\alpha_q}((\phi^*)_*^{-1}(e, \beta)) = \theta_{\alpha_q}(\omega_{\alpha_q}) \quad (3.2.20)$$

Aplicando la definición de θ_{α_q} , tendremos

$$(\phi^{**} \circ \theta_0 \circ (\phi^*)^{-1})(\alpha)(e, \beta) = \alpha_q((\pi_Q^*)_*(\omega_{\alpha_q})) = \alpha_q((\pi_Q^*)_*((\phi^*)_*^{-1}(e, \beta))) = \alpha_q((\pi_Q^* \circ (\phi^*)^{-1})_*(e, \beta)) \quad (3.2.21)$$

Por otra parte, es inmediato que $\pi_Q^* \circ (\phi^*)^{-1} = \phi^{-1} \circ \pi_1$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\pi_Q^*} T^*U & \xrightarrow{\theta_0} T^*T^*U \\ \downarrow \phi & \uparrow \phi^* & \downarrow \phi^{**} \\ U' & \xleftarrow{\pi_1} U' \times (\mathbb{R}^n)^* & U' \times (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^{**} \end{array}$$

de modo que

$$\begin{aligned} (\phi^{**} \circ \theta_0 \circ (\phi^*)^{-1})(\alpha)(e, \beta) &= \alpha_q((\phi^{-1} \circ \pi_1)_*(e, \beta)) = \alpha_q(\phi_*^{-1}((\pi_1)_*(e, \beta))) = \alpha_q(\phi_*^{-1}(e)) = \phi^*(\alpha_q)(e) \\ &= \alpha(e) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

por lo que θ_0 es diferenciable, al serlo α en todo punto, de modo que $\theta_0 \in \mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$. Ahora por definición, $\omega_0 = -d\theta_0$, aplicando la Proposición A.2.2, se tiene que en la expresión local dada aquí para θ_0 , tendremos

$$\begin{aligned} \omega_0(x, \alpha)((x, \alpha, e_1, \beta_1), (x, \alpha, e_2, \beta_2)) &= -J(\theta_0)_{(x, \alpha)}(x, \alpha, e_1, \beta_1), (x, \alpha, e_2, \beta_2) \\ &\quad + J(\theta_0)_{(x, \alpha)}(x, \alpha, e_2, \beta_2), (x, \alpha, e_1, \beta_1) \\ &= \beta_2(e_1) - \beta_1(e_2) \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

usando que $J(\theta_0)_{(x, \alpha)}(x, \alpha, e, \beta) = \beta$, actuando únicamente sobre el tercer factor.

Es trivial que ω_0 es cerrada. Por inspección es inmediato que sobre $T_{x, \alpha}M$, ω_0 como aplicación lineal vendrá dada por la matriz 3.1.13, de modo que ω_0 es no degenerada (en todo punto), y por tanto forma simpléctica. \square

La demostración para el caso infinito dimensional es análoga, bastando sustituir \mathbb{R}^n por el espacio V sobre el que tomen imágenes las cartas de la variedad, prestando atención en este caso a los espacios V^* y V^{**} (este último no necesariamente isomorfo a V).

Para el resultado en coordenadas locales, se remite a la Sección 2.1.1.

Un resultado directo de este teorema es que todas las variedades simplécticas de dimensión $2n$ son localmente simplectodifeomorfas entre sí (esto es, localmente existen una aplicaciones simplécticas entre ambos que además son difeomorfismos locales). En concreto, toda variedad simpléctica de dimensión $2n$ lo será de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, con la 2-forma canónica $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$. Es por esto que es posible encontrar cartas locales de la esfera sin polos $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, equipada con la forma simpléctica¹ $d\theta \wedge dz$, a \mathbb{R}^2 que conserven el área. Por el contrario, en Geometría Riemanniana la curvatura es una invariante local, por lo que no es posible establecer cartas locales de \mathbb{S}^2 (con curvatura positiva constante) a \mathbb{R}^2 (con curvatura nula) que sean isometrías.

3.3. Un par de resultados de Geometría Simpléctica

En la anterior sección, mediante el teorema de Darboux (3.2.11), vimos que para toda variedad diferenciable M de dimensión par en la que haya definida una forma simpléctica ω es posible encontrar cartas simplécticas locales $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ en las que $\omega = \sum_{i=1}^n x^i \wedge y^i$. Siguiendo las ideas de la subsección 2.1.1 del Capítulo 2, podemos extender la noción de *sistema hamiltoniano* a cualquier variedad simpléctica (M, ω) , no necesariamente el fibrado cotangente T^*Q de otra variedad Q . Se tratará así de una terna (M, ω, X_H) , donde $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ será un campo vectorial asociado a una función $H \in \mathfrak{F}(M)$ (que apropiadamente denominaremos también *Hamiltoniano*) mediante $\iota_{X_H}\omega = dH$. Los resultados referidos a la expresión de X_H en coordenadas locales, y a sus curvas integrales siguen siendo válidas tras esta generalización (si bien obviamente sistemas hamiltonianos en los que ω no sea la 2-forma canónica ω_0 no darán lugar en general a las mismas curvas integrales que en el caso estándar).

A continuación, una vez introducidas las nociones de aplicaciones simplécticas y formas de volumen, incluiremos un par de resultados sencillos al respecto por parte de los sistemas Hamiltonianos.

Teorema 3.3.1 (de Liouville). *Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano y F el flujo asociado a X_H . Entonces para todo t para el que esté definido el flujo, F_t es simpléctica, esto es, $F_t^*\omega = \omega$. En particular F_t conserva el volumen Ω_ω .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es inmediata. Utilizando la relación entre flujos y derivadas de Lie (Teorema 3.2.8), y la definición de esta,

$$\frac{d}{dt}F_t^*\omega = F_t^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = F_t^*[d(\iota_{X_H}\omega) + \iota_{X_H}(d\omega)] = F_t^*[d^2H + 0] = F_t^*0 = 0 \quad (3.3.1)$$

donde hemos usado que ω es cerrada ($d\omega = 0$), la definición de campo Hamiltoniano ($\iota_{X_H}\omega = dH$) y que $d^2 = 0$. Por lo tanto $F_t^*\omega = F_{t'}^*\omega$ para todo t y t' en los que F_t esté definido. Sin embargo, como por definición $F_0 = \text{Id}$, se tiene $F_t^*\omega = F_0^*\omega = \omega$ y F_t es simpléctica. Por la Proposición 3.2.14 se tiene la conservación del volumen. \square

¹Es inmediato que $d\theta \wedge dz$ es cerrada, aplicando el buen comportamiento de la diferencial exterior con el producto exterior, y que $d^2 = 0$. Para ver que $d\theta \wedge dz$ es no degenerada basta tomar los generadores de los espacios tangentes $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$ y realizar una comprobación similar a la de la Proposición 2.1.7.

Como corolario de este teorema presentamos el siguiente, de gran importancia en la Mecánica Teórica:

Teorema 3.3.2 (de recurrencia de Poincaré). *Sea un sistema hamiltoniano (M, ω, X_H) con M compacta, y sea F el flujo asociado a X_H . Entonces para todo subconjunto abierto $U \subseteq M$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap F_n(U) \neq \emptyset$.*

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. La parte fundamental de esta prueba se encuentra una forma de volumen Ω sobre una variedad M tiene asociada una medida $\mu_\Omega : \Sigma_M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sobre la σ -álgebra de Borel de M , de modo que dado $U \in \Sigma_M$, se define

$$\mu_\Omega(U) := \int_U \Omega, \quad (3.3.2)$$

cobrando sentido llamar “forma de volumen” a Ω . Una prueba rigurosa de esto requiere aplicar integración de n -formas sobre variedades, lo cual se escapa del propósito del trabajo². Demos por supuesto entonces que tal medida μ_Ω está bien definida, y que si una aplicación $f : M \rightarrow M$ conserva la forma de volumen (esto es $f^*\Omega = \Omega$), entonces conserva también la medida, $\mu_\Omega(f(U)) = \mu_\Omega(U)$.

Tomemos entonces tal subconjunto abierto $U \subseteq M$ (que por tanto estará en Σ_M y tendrá medida no nula), y definamos $U_0 = U$, $U_n = F_n(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ser F_t aplicación simpléctica, conserva la medida, y $\mu_{\Omega_\omega}(U_n) = \mu_{\Omega_\omega}(U) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por reducción al absurdo, supongamos que el teorema no es cierto. Tendremos entonces que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Por otro lado, aplicando las propiedades de una medida, como $\bigcup_{n=0}^\infty U_n \subseteq M$, tendremos

$$\mu_{\Omega_\omega}(M) \geq \mu_{\Omega_\omega}\left(\bigcup_{n=0}^\infty U_n\right) = \sum_{n=0}^\infty \mu_{\Omega_\omega}(U_n) = \mu_{\Omega_\omega}(U) \sum_{n=0}^\infty 1 = +\infty, \quad (3.3.3)$$

lo cual es un absurdo ya que $\mu_{\Omega_\omega}(M) < \infty$, al ser M compacta. Tendremos por lo tanto que existirán $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $i > j$ tal que $U_i \cap U_j = F_i(U) \cap F_j(U) \neq \emptyset$. Aplicando la definición de flujo y que define difeomorfismos locales, esto equivale a $F_{i-j}(U) \cap F_0(U) = U_{i-j} \cap U \neq \emptyset$, quedando probado el teorema. \square

La verdadera importancia de este teorema radica en que, para un sistema dinámico, dado un punto $x_0 \in M$ que tome en un tiempo t_0 , y quedando determinada su evolución por $x(t) = F_{t-t_0}(x_0)$, volverá a pasar por un punto arbitrariamente cercano para un tiempo suficientemente posterior. Este teorema, planteado en 1890 por J.H. Poincaré (1854-1912) (artículo original [Poincaré, 1890]) y demostrado formalmente en 1919 por C. Carathéodory (1873-1950) ([Carathéodory, 1919]), tiene gran importancia histórica en el contexto del desarrollo de la Física Estadística, haciendo compatible el aumento de la entropía de un sistema (establecido por el Segundo Principio de la Termodinámica) con la aparente reversibilidad teórica de ciertos sistemas mecánicos, lo que previamente se conocía como *Paradoja de Loschmidt* (para más información al respecto se remite a [Wu, 1975]). Los conceptos de *recurrencia*, *ergodicidad* (según la cual todos los estados accesibles de un sistema terminan tomándose con probabilidad *casi seguro*), etc. se originan de este resultado, utilizándose teoría de la medida y probabilidad para estudiarlos en el contexto de Sistemas Dinámicos. Entendiblemente, tanto por límites de extensión como de temática, no se tratarán en este trabajo.

²Se puede encontrar un desarrollo teórico sobre la integración de n -formas en variedades diferenciables de dimensión n en el Capítulo 2.6 de [Abraham, 1977], utilizando cartas a \mathbb{R}^n y particiones de la unidad. A lo largo del Capítulo 8 de [Conlon, 2001] se desarrollan con más rigor estos conceptos, introduciendo integración sobre cadenas y cohomología de De Rham. Obviamente estos conceptos se salen del objetivo y campo de este trabajo y únicamente mostramos la referencia para una lectura sobre el tema.

Relación entre Geometrías Simpléctica, Riemanniana y Compleja. Variedades de Kähler.

Índice

| | |
|---|----|
| 4.1. Tripletes compatibles | 37 |
| 4.2. Fundamentos de variedades complejas | 41 |
| 4.3. Variedades de Kähler | 45 |
| 4.3.1. Ejemplos de variedades de Kähler | 47 |
| 4.3.2. Comentarios finales sobre variedades simplécticas y de Kähler. | 48 |

Como hemos visto en el capítulo anterior, la Geometría Simpléctica consiste en el estudio de variedades diferenciables dotadas de una 2-forma simpléctica ω , en la que esta es cerrada y no degenerada. Se tiene a partir de esta una forma de volumen Ω_ω asociada, que es conservada por aplicaciones simplécticas.

Un caso aún más “clásico” en la Geometría Diferencial es el de la *Geometría Riemanniana*, en la que la variedad diferenciable M está acompañada de un tensor $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétrico y definido positivo, que denominaremos *métrica riemanniana*. Esta es conservada por aplicaciones conocidas como isometrías, y nos permite la medida de distancias, ángulos, etc.

Por otra parte, si bien hasta ahora hemos estado considerando variedades con cartas cuyas imágenes son abiertos de \mathbb{R}^n , cabe la posibilidad de tomar variedades cuyas cartas vayan a \mathbb{C}^n (exigiendo además las propiedades de diferenciación compleja necesarias). Nos encontramos así con *variedades diferenciables y Geometría Complejas*.

Sin necesidad de desarrollar en gran profundidad las propiedades específicas de estas geometrías, en este capítulo se estudiará la relación entre estos tres tipos de variedades, prestando especial atención a las conocidas como *variedades de Kähler*, en la que están definidas simultáneamente estructuras simpléctica, riemanniana y compleja. Terminaremos este capítulo (y por ende el trabajo) mostrando algunas restricciones topológicas que establecen la existencia de estas estructuras.

Para la elaboración de este capítulo se han seguido principalmente los Capítulos 12 a 17 de [Cannas, 2001], así como conceptos de [Bazzoni, 2016] y del Capítulo 13 de [Dubrovin, 1987]. Otros textos de los que se han utilizado conceptos concretos vienen referenciados a lo largo del capítulo.

4.1. Tripletes compatibles

Como se vio en la Sección 3.1, dada una 2-forma ω cerrada ($d\omega = 0$), no degenerada ($\omega^n \neq 0$ en todo punto) y antisimétrica sobre un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$, existe una base ordenada de V , $\{e^i\}_{i=1}^{2n}$, en la que la matriz de ω como aplicación bilineal se puede escribir como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

A lo largo del Capítulo 3 vimos cómo es posible generalizar este concepto a variedades diferenciables M por medio del fibrado tangente, obteniéndose las conocidas como variedades simplécticas (M, ω) . Por otro lado, es inmediato comprobar que $J^2 = -\text{Id}_{2n}$. Se establece así la conexión con la Geometría Casi-Compleja, en la que sobre una variedad diferenciable M existe una aplicación $J \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tal que $J \circ J = -\text{Id}$, teniéndose así variedades casi-complejas (M, J) . Como veremos además, la relación entre ambas se dará a partir de la Geometría Riemanniana, en la que sobre M existe un tensor $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétrico y definido positivo.

En primer lugar, veamos esta relación sobre \mathbb{R}^n , generalizándola después a espacios vectoriales, y de aquí a variedades diferenciables.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$ \mathbb{R}^{2n} , con coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, y bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}_{i=1}^n$ y $\{dx^i, dy^i\}_{i=1}^n$ de los espacios tangente y cotangente, respectivamente. Es posible definir entonces una 2-forma simpléctica canónica $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j$ que sobre $u, v \in T_p M$ actúa como

$$\omega_0(u, v) = u^t \begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} v = v^t \begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} u \quad (4.1.2)$$

al tenerse que como $\omega_0(u, v) \in \mathbb{R}$, $(\omega_0(u, v))^t = \omega_0(u, v)$, y donde u^t denota el vector traspuesto. Del mismo modo, tenemos el producto escalar usual, $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, que actúa como

$$g_0(u, v) = u^t \begin{bmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & \text{Id}_n \end{bmatrix} v \quad (4.1.3)$$

tratándose de una métrica riemanniana sobre \mathbb{R}^{2n} . Por otra parte, partiendo del hecho de que \mathbb{C}^n es isomorfo a \mathbb{R}^{2n} tomando las coordenadas $\{z^j := x^j + \sqrt{-1}y^j\}$, se puede definir la aplicación lineal J_0 que queda determinada por su actuación sobre los elementos de la base de los espacios tangentes $T_p M$:

$$J_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad J_0 \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^j} \quad (4.1.4)$$

de modo que $J_0^2 = -\text{Id}$. Matricialmente se tiene que para $u \in T_p M$,

$$J_0(u) = \begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} u \quad (4.1.5)$$

Estamos ahora en condiciones de realizar la siguiente conexión:

$$\omega_0(u, v) = v^t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix}}_{J_0(u)} u = g_0(v, J_0(u)) = g_0(J_0(u), v) \quad (4.1.6)$$

y de manera análoga

$$\begin{aligned} g_0(u, v) &= u^t \begin{bmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & \text{Id}_n \end{bmatrix} v = -u^t \begin{bmatrix} -\text{Id}_n & 0 \\ 0 & -\text{Id}_n \end{bmatrix} v = -u^t \begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix}}_{J_0(v)} v \\ &= -\omega_0(J_0(v), u) = \omega_0(u, J_0(v)) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Se ha mostrado de esta manera la existencia en \mathbb{R}^{2n} de una terna $\{\omega_0, g_0, J_0\}$ de estructuras o formas simpléctica, riemanniana y (casi)compleja que “se comportan bien entre sí”, siendo capaces de obtener la métrica riemanniana a través de la forma simpléctica y viceversa haciendo uso de J_0 . Como es de suponer, la generalización de esto a otros espacios que no sean \mathbb{R}^{2n} , comenzando por \mathbb{R} -espacios vectoriales, no es tan sencilla, de modo que será necesario introducir en primer lugar algunos conceptos y resultados previos, comenzando por el de *estructura compleja* sobre un espacio vectorial.

Definición 4.1.2. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$. Se dice *estructura compleja* en V a cualquier aplicación $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -\text{Id}_V$. Se dirá entonces que (V, J) es un espacio vectorial complejo, donde se identifica $V \simeq \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$, y la aplicación de J en V equivale a la multiplicación por la unidad imaginaria i en \mathbb{C}^n .

Generalizando el ejemplo anterior tendremos ahora

Definición 4.1.3. Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Una estructura compleja J sobre V se dice ω -compatible si

$$\begin{aligned} g_J : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \omega(u, J(v)) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

es un producto escalar sobre V , esto es, g_J es simétrico, lineal y definido positivo.

Tendremos la siguiente caracterización equivalente:

Proposición 4.1.4. Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico y J estructura compleja sobre él. Tendremos que J es ω -compatible sii $\omega(J(u), J(v)) = \omega(u, v)$ (esto es, $J^*\omega = \omega$ y J es aplicación simpléctica) para todo $u, v \in V$ y $\omega(u, J(u)) > 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$

DEMOSTRACIÓN.

\Rightarrow) Es inmediato que si g_J es producto escalar, entonces $\omega(u, J(u)) = g_J(u, u) > 0$ si $u \neq 0$, y del mismo modo

$$\omega(J(u), J(v)) = g_J(J(u), v) = g_J(v, J(u)) = \omega(v, J^2(u)) = -\omega(v, u) = \omega(u, v) \quad (4.1.9)$$

\Leftarrow) En primer lugar al ser J y ω (bi)lineales, también lo es g_J . Tendremos fácilmente que por hipótesis g_J es definido positivo, ya que dado $u \in V \setminus \{0\}$, $g_J(u, u) = \omega(u, J(u)) > 0$. Por último, respecto a la simetricidad,

$$g_J(u, v) = \omega(u, J(v)) = \omega(J(u), J^2(v)) = -\omega(J(u), v) = \omega(v, J(u)) = g_J(v, u) \quad (4.1.10)$$

□

Nos podemos preguntar ahora si es siempre posible, dado un espacio vectorial simpléctico (V, ω) , encontrar una estructura compleja J que sea ω -compatible.

Proposición 4.1.5. *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Entonces siempre existe una estructura compleja $J : V \rightarrow V$ ω -compatible.*

DEMOSTRACIÓN. Llevaremos a cabo una prueba constructiva de este resultado. Comencemos por tomar $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar cualquiera sobre V , lo cual siempre es posible encontrar (basta tomar la aplicación bilineal asociada a una matriz $\dim V \times \dim V$ simétrica y definida positiva). Puesto que tanto ω como g son no degeneradas, tendremos que

$$\begin{array}{ccc} \Omega : V & \rightarrow & V^* \\ u & \mapsto & \omega(u, \cdot) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} G : V & \rightarrow & V^* \\ u & \mapsto & g(u, \cdot) \end{array} \quad (4.1.11)$$

son isomorfismos entre V y V^* , de modo que existirá una aplicación lineal $A := G^{-1} \circ \Omega : V \rightarrow V$ (de hecho isomorfismo al ser composición de estos), o equivalentemente $\Omega = G \circ A$. Esto es, para todo $u, v \in V$,

$$\omega(u, v) = g(A(u), v) \quad (4.1.12)$$

Comprobemos ahora algunas propiedades sobre la matriz asociada a A , que por abuso de notación denotaremos igual. En primer lugar, puesto que

$$g(A^t u, v) = g(u, Av) = g(Av, u) = \omega(v, u) = -\omega(u, v) = g(-Au, v) \quad (4.1.13)$$

se tiene que, aplicando que g es no degenerada y $\ker A = \{0\}$ al ser esta isomorfismo,

$$0 = g(A^t u, v) - g(-Au, v) = g(A^t u + Au, v) \quad \forall u, v \in V \Rightarrow (A^t + A)u = 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow A^t = -A, \quad (4.1.14)$$

de modo que A es antisimétrica. Por otro lado, AA^t es simétrica, pues $(AA^t)^t = A^{tt}A^t = AA^t$, y definida positiva, pues $u^t AA^t u = (A^t u)^t (A^t u) > 0$ si $A^t u \neq 0$, lo que es equivalente a que $u \neq 0$, al ser A isomorfismo. Esto implica que existirán matrices de cambio de base B , con $B^t = B^{-1}$ y una serie de valores propios $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2n}$, con $\lambda_i > 0$, al ser AA^t definida positiva, de modo que se puede diagonalizar AA^t como

$$AA^t = B \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} B^{-1} \quad (4.1.15)$$

Con esta estructura diagonal con elementos positivos es posible definir la raíz cuadrada¹ de AA^t , de modo que podremos escribir

$$\sqrt{AA^t}^{-1} = B \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_{2n}}^{-1} \end{bmatrix} B^{-1} \quad (4.1.16)$$

inmediatamente definida positiva y simétrica. Definiremos ahora²

$$J := \sqrt{AA^t}^{-1} A = A \sqrt{AA^t}^{-1} \quad (4.1.17)$$

ya que al ser $\sqrt{AA^t}^{-1}$ simétrica y A antisimétrica,

$$\sqrt{AA^t}^{-1} A = - \left(\sqrt{AA^t}^{-1} A \right)^t = -A^t \left(\sqrt{AA^t}^{-1} \right)^t = A \sqrt{AA^t}^{-1} \quad (4.1.18)$$

¹Dada una matriz cuadrada $n \times n$ B , se dice que otra matriz C de las mismas dimensiones es *raíz cuadrada* de B si $C^2 = B$. Es fácil encontrar ejemplos de matrices que no tengan una única raíz cuadrada, por ejemplo Id_2 tiene como raíz cuadrada cualquier matriz

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + r^2}} \begin{pmatrix} s & r \\ r & -s \end{pmatrix} \quad \text{para } s, r \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Para matrices diagonalizables con valores propios positivos, como es el caso de $AA^t = B \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) B^{-1}$, se diremos que $\sqrt{AA^t} := B \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) B^{-1}$ (que trivialmente cumple $\sqrt{AA^t}^2 = AA^t$) es la *raíz cuadrada principal* de AA^t .

²La descomposición dada aquí $A = \sqrt{AA^t} J = J \sqrt{AA^t}$ se trata de una *descomposición polar* de A . Se trata de una descomposición análoga de los números complejos $z = re^{i\phi}$, donde $\sqrt{AA^t}$ hace el papel de “módulo” de A (es inmediato que $\det \sqrt{AA^t} = \det A > 0$, al ser definida positiva) y es inmediato que J es una matriz unitaria, por lo que $\det J = e^{i\phi}$ para algún $\phi \in [0, 2\pi)$, incluyendo el caso complejo. Intuitivamente se puede tratar de entender como la descomposición de A como aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n en un reescalado de la base de vectores propios de A , dado por $\sqrt{AA^t}$, seguido de un “giro”, dado por J . Para una lectura en mayor profundidad acerca de la descomposición polar de matrices se remite a la Sección 7.3 de [Horn, 2012]

Es inmediato que la aplicación J aquí definida es una estructura compleja, pues

$$J^2 = A\sqrt{AA^t}^{-1}A\sqrt{AA^t}^{-1} = A^2\sqrt{AA^t}^{-2} = -AA^t(AA^t)^{-1} = -\text{Id}_{2n}, \quad (4.1.19)$$

además de ser antisimétrica,

$$J^t = \left(\sqrt{AA^t}^{-1}A\right)^t = A^t\sqrt{AA^t}^{-1} = -A\sqrt{AA^t}^{-1} = -\sqrt{AA^t}^{-1}A = -J \quad (4.1.20)$$

y siéndonos además de utilidad que $JJ^t = -J^2 = \text{Id}_{2n}$.

Respecto a ser ω -compatible, basta aplicar la Proposición 4.1.4, ya que se tiene que para cualquier $u, v \in V$

$$\omega(J(u), J(v)) = g(AJu, Jv) = g(JAu, Jv) = g(Au, J^tJv) = g(Au, v) = \omega(u, v) \quad (4.1.21)$$

donde hemos aplicado que J conmuta con A , y de nuevo hemos incurrido en un cierto abuso de notación. Por otro lado, para $u \in V \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \omega(u, J(u)) &= g(Au, Ju) = g(J^tAu, u) = -g(JAu, u) = -g\left(\sqrt{AA^t}^{-1}A^2u, u\right) = g\left(\sqrt{AA^t}^{-1}AA^tu, u\right) \\ &= g\left(\sqrt{AA^t}u, u\right) = g\left(\sqrt{AA^t}^{-1}u, u\right) > 0 \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

al tener $g \circ \sqrt{AA^t}$ matriz asociada definida positiva y simétrica. Se concluye así que el J construido es una estructura compleja ω -compatible \square

Es fácil observar que el modo en el que se ha definido, $J = \sqrt{AA^t}^{-1}A$ depende únicamente de $A = G^{-1} \circ \Omega$, que queda unívocamente determinado al elegir ω y g . De este modo, si tomamos una familia de $\{\omega_t, g_t\}_t$ que “varían suavemente”, las estructuras complejas obtenidas $\{J_t\}_t$ también lo harán. Esto nos ayudará a traducir fácilmente este resultado a variedades mediante el uso de los fibrados tangentes.

Observación 4.1.6. El producto interior definido a partir de ω y la J obtenida no tiene por qué corresponderse con el elegido para la construcción de J :

$$g_J(u, v) = \omega(u, J(v)) = g(Au, Jv) = g(J^tAu, v) = g\left(\sqrt{AA^t}^{-1}AA^tu, v\right) = g\left(\sqrt{AA^t}u, v\right) \quad (4.1.23)$$

dándose únicamente la igualdad en el caso $\sqrt{AA^t} = \text{Id}_{2n}$, equivalente a $A^t = A^{-1}$, lo cual no tiene por qué ocurrir en general.

Observación 4.1.7. El caso recíproco a la Proposición 4.1.5, para obtener, dado un espacio vectorial complejo (V, J) una forma simpléctica tal que J sea ω -compatible, es mucho más sencillo, bastando tomar un producto escalar g en V cualquiera, y definir

$$\omega(u, v) := g(J(u), v), \quad (4.1.24)$$

trivialmente antisimétrica,

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= g(J(u), v) = g(v, J(u)) = -g(J^2(v), J(u)) = -g(J(v), J^tJ(u)) \\ &= -g(J(v), -J^2(u)) = -g(J(v), u) = -\omega(v, u) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

al aplicar la simetricidad de g y la antisimetricidad de J .

Una vez vista la relación entre formas simplécticas, complejas y riemannianas sobre espacios vectoriales, la generalización a variedades diferenciables a partir de los fibrados (co)tangentes es bastante directa:

Definición 4.1.8. Sea M una variedad diferenciable. Un tensor $J \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ se dice estructura casi-compleja si $J_x^2 = -\text{Id}_{T_x M}$ para todo $x \in M$. Diremos que el par (M, J) es una variedad casi-compleja.

El prefijo casi- se introduce para distinguir a estas de las *variedades complejas*, concepto que, como veremos, está relacionado pero no es equivalente. La extensión a variedades del concepto de estructura compatible es inmediato:

Definición 4.1.9. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Una estructura casi-compleja J sobre ella se dice ω -compatible si $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$, entendido punto a punto:

$$\begin{aligned} g_x : T_x M \times T_x M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \omega_x(u, J(v)) \quad \forall x \in M \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

es métrica riemanniana. La terna (ω, g, J) cumpliendo las propiedades vistas se dice triplete compatible.

En cuanto a la hipotética existencia de tal triplete, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.10. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y g una métrica riemanniana sobre M . Entonces siempre existe una estructura casi compleja J en M ω -compatible.*

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de la Proposición 4.1.5, dado $x \in M$ cualquiera, $(T_x M, \omega_x)$ es un espacio vectorial simpléctico y g_x es un producto escalar sobre él. Dado $a_x = g_x^{-1} \omega_x$, es fácil ver que $a \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, actuando g^{-1} como un “isomorfismo musical” y elevando un índice de $\omega \in \Omega^2(M) \subset \mathfrak{F}_2^0(M)$. No es difícil demostrar que la descomposición polar es diferenciable. Ahora, como en cada punto se tiene $J_x = \sqrt{a_x a_x^t}^{-1} a_x = \sqrt{a_x a_x^t}^{-1} g_x^{-1} \omega_x$, se tiene que es diferenciable, al serlo todos sus factores. \square

Al igual que se comentó en el caso de espacio vectorial, la métrica riemanniana g_J dada por $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ no coincide en general con la métrica g usada para construir J .

Por otra parte, dado que siempre es posible definir una métrica riemanniana sobre una variedad diferenciable (siempre que esta sea T_2 y cumpla el II Axioma de Numerabilidad, ver Proposición 2.5.13 de [Abraham, 1977]), se tiene de manera obvia el siguiente corolario:

Corolario 4.1.11. *Sobre toda variedad simpléctica (M, ω) es posible encontrar tripletes compatibles.*

4.2. Fundamentos de variedades complejas

Introduciremos ahora unos conceptos básicos de variedades (casi)complejas, que nos permitirán apreciar las diferencias que existen con las variedades diferenciables reales, y servirán de base para en la siguiente sección construir las variedades de Kähler.

Definición 4.2.1. *Llamamos variedad diferenciable compleja de dimensión (compleja) n a un conjunto M dotado de una atlas maximal complejo $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, de modo que $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ y las imágenes de $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ son abiertos de \mathbb{C}^n tal que el cambio de cartas es biholomorfo, esto es, dados $\alpha, \beta \in I$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n \quad (4.2.1)$$

es biyectiva, holomorfa³ y de inversa holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^n .

Es inmediato que identificando $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toda variedad diferenciable compleja de dimensión (compleja) n es una variedad diferenciable real de dimensión (real) $2n$. Respecto a la relación con las variedades casi-complejas, tenemos lógicamente siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Toda variedad diferenciable compleja tiene una estructura casi-compleja canónica.*

DEMOSTRACIÓN. Partamos de una carta local (U, ϕ) de la variedad compleja M de dimensión n , tal que sus funciones coordenadas son $\phi = (z^1, \dots, z^n) = (x^1 + iy^1, \dots, x^n + iy^n)$. Dado un punto $p \in U$, su espacio tangente estará dado por

$$T_p M = \left\langle \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right\}_{j=1}^n \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad (4.2.6)$$

³Recordemos que dada una función de una variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que esta es *holomorfa* en $z_0 \in \Omega$ si el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.2.2)$$

existe. Si esto ocurre para todo $z \in \Omega$, entonces diremos que f es holomorfa en Ω . Separando f en parte real e imaginaria como $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, se tiene que si f es holomorfa, entonces se cumplen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.3)$$

La extensión a varias variables no es trivial, definiéndose que la aplicación

$$f : \underbrace{(x^1 + iy^1, \dots, x^n + iy^n)}_{z^1, \dots, z^n} \mapsto \underbrace{(u^1(z^1, \dots, z^n) + iv^1(z^1, \dots, z^n), \dots, u^m(z^1, \dots, z^n) + iv^m(z^1, \dots, z^n))}_{f^1(z^1, \dots, z^n), \dots, f^m(z^1, \dots, z^n)} \quad (4.2.4)$$

es holomorfa si cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cualquier par de índices, esto es,

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u^j}{\partial y^k} = -\frac{\partial v^j}{\partial x^k} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, n\} \quad (4.2.5)$$

Para un texto de mayor profundidad sobre diferenciabilidad de funciones de varias variables complejas se remite a las secciones 1.6 y 1.7 de [Grauert, 2012]

donde el subíndice \mathbb{R} indica que las combinaciones lineales se harán con coeficientes reales. Ahora, basta definir J sobre U como

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \quad J_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right) = - \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \quad \text{para } j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.2.7)$$

lo cual es inmediato que $J_p^2 = -\text{Id}_{T_p M}$. Es fácil ver que J es la traducción al fibrado tangente de multiplicar $z^j = x^j + iy^j$ por la unidad imaginaria i . Veamos ahora que J se comporta bien con el cambio de cartas en los puntos en los que estas se solapan. Sean (U, ϕ) y (U', ϕ') dos cartas sobre M con $U \cap U' \neq \emptyset$, y respectivamente funciones coordenadas $z^j = x^j + iy^j$ y $w^j = u^j + iv^j$. Sean además J y J' las estructuras casi-complejas definidas en cada dominio, queriendo ver que $J = J'$ sobre $U \cap U'$. Aplicando la regla de la cadena para el cambio de variables sobre la intersección de las cartas, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial v^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^k} = \frac{\partial u^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial v^j} \quad (4.2.8)$$

Ahora, puesto que M es variedad compleja, el cambio de cartas $\psi = \phi' \circ \phi$ es biholomorfo, de modo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x^k} = \frac{\partial v^j}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial u^j}{\partial y^k} = - \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.2.9)$$

de modo que

$$\begin{aligned} J' \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= J' \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial x^k}}_{\frac{\partial v^j}{\partial y^k}} J' \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial x^k}}_{-\frac{\partial u^j}{\partial y^k}} J' \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \right) = \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial v^j} + \frac{\partial u^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^k} = J \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

De manera análoga se prueba para $\frac{\partial}{\partial y^k}$. Puesto que J y J' coinciden para los elementos generadores de $T_p M$ para todo $p \in U \cap U'$, coinciden para todos los vectores de $T_p M$. \square

Una vez visto que las variedades complejas se tratan de un caso particular de las casi-complejas, veamos algunos apuntes del comportamiento de estas en cuanto a formas diferenciales y otros artefactos del Cálculo Exterior. Consideremos pues una variedad casi-compleja (M, J) , y veamos en primer lugar el comportamiento de los fibrados (co)-tangente al considerar la estructura J .

Definición 4.2.3. Dada (M, J) una variedad casi-compleja, denominaremos fibrado tangente complejo, $TM \otimes \mathbb{C}$ al fibrado compuesto por las fibras $(TM \otimes \mathbb{C})_p = T_p M \otimes \mathbb{C}$, entendidas como el espacio vectorial complejo generado por las derivadas parciales en $p \in M$ tomando coeficientes complejos.

Dado $z \in \mathbb{C}$, podemos extender J linealmente como $J(v \otimes z) = (Jv) \otimes z$. Puesto que así $J^2 = -\text{Id}_{(TM \otimes \mathbb{C})_p}$, y $(TM \otimes \mathbb{C})_p$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial, podremos definir el fibrado los autoespacios asociados a $\pm i$ como

$$T_{0,1} := \{v \in TM \otimes \mathbb{C} : Jv = +iv\}, \quad T_{0,-1} := \{v \in TM \otimes \mathbb{C} : Jv = -iv\} \quad (4.2.11)$$

siendo sus vectores denominados respectivamente J -lineares y J -antilineares. Siendo fácil ver que $TM \otimes \mathbb{C} \simeq T_{1,0} \oplus T_{0,1}$, tenemos las siguientes proyecciones naturales:

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} : TM \otimes \mathbb{C} &\rightarrow T_{1,0} & \pi_{0,1} : TM \otimes \mathbb{C} &\rightarrow T_{0,1} \\ v &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes 1 - Jv \otimes i) & v &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes 1 + Jv \otimes i) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

siendo inmediato que están bien definidas. Además, puesto que se comprueba que

$$J \left[\frac{1}{2}(v \otimes 1 - Jv \otimes i) \right] = \frac{1}{2}(Jv \otimes 1 - J^2 v \otimes i) = \frac{i}{2}(v \otimes 1 - Jv \otimes i) \quad (4.2.13a)$$

$$J \left[\frac{1}{2}(v \otimes 1 + Jv \otimes i) \right] = \frac{1}{2}(Jv \otimes 1 + J^2 v \otimes i) = -\frac{i}{2}(v \otimes 1 + Jv \otimes i) \quad (4.2.13b)$$

se tiene que $\pi_{1,0} \circ J = J \circ \pi_{1,0} = i\pi_{1,0}$ y $\pi_{0,1} \circ J = J \circ \pi_{0,1} = -i\pi_{0,1}$

De manera similar, para el fibrado cotangente,

Definición 4.2.4. Dada una variedad casi-compleja (M, J) , se denomina fibrado cotangente complejo, $T^*M \otimes \mathbb{C}$ al fibrado compuesto por las fibras $(T^*M \otimes \mathbb{C})_p = T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ entendidas como los \mathbb{C} -espacios vectoriales duales de $T_pM \otimes \mathbb{C}$. Además, denominamos respectivamente covectores J -lineares y J -antilineares ^a

$$T^{0,1} := \{\alpha \in T^*M \otimes \mathbb{C} : \alpha(Jv) = +i\alpha(v) \forall v \in TM \otimes \mathbb{C}\} \quad (4.2.14a)$$

$$T^{1,0} := \{\alpha \in T^*M \otimes \mathbb{C} : \alpha(Jv) = -i\alpha(v) \forall v \in TM \otimes \mathbb{C}\}, \quad (4.2.14b)$$

pudiéndose demostrar que $T^*M \otimes \mathbb{C} \simeq T^{1,0} \oplus T^{0,1}$. De este modo tendrá sentido definir las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi^{1,0} : T^*M &\rightarrow T_{1,0} & \pi_{0,1} : TM &\rightarrow T_{0,1} \\ \alpha &\mapsto \frac{1}{2}(\alpha \otimes 1 - i\alpha \circ J) & \alpha &\mapsto \frac{1}{2}(\alpha \otimes 1 + i\alpha \circ J) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Podremos ahora definir formas diferenciales complejas para variedades casi-complejas.

Definición 4.2.5. Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Viendo las 1-formas de M como las secciones del espacio co-tangente de esta y que en la extensión a los complejos $T^*M \otimes \mathbb{C} \simeq T^{1,0} \oplus T^{0,1}$, definiremos las formas diferenciales de tipo (l, m) sobre (M, J) mediante los sucesivos productos exteriores de covectores J -lineares y antilineares:

$$\Omega^{l,m}(M) := \{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_l \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_m : \alpha_i \in T^{1,0}, \beta_j \in T^{0,1}\}, \quad (4.2.16)$$

teniendo en concreto $\Omega^{1,0}(M) = T^{1,0}$ y $\Omega^{0,1}(M) = T^{0,1}$, y las k -formas complejas sobre M como

$$\Omega^k(M; \mathbb{C}) := \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m}(M) \quad (4.2.17)$$

Dados $l + m = k$, de forma natural aparecen las proyecciones $\pi^{l+m} : \Omega^k(M; \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{l,m}$, a partir de las cuales y de la diferencial exterior d podemos introducir los conocidos como operadores de Dolbeault:

$$\partial := \pi^{l+1,m} \circ d : \Omega^{l,m}(M) \rightarrow \Omega^{l+1,m}(M), \quad \bar{\partial} := \pi^{l,m+1} \circ d : \Omega^{l,m}(M) \rightarrow \Omega^{l,m+1}(M), \quad (4.2.18)$$

de modo que la diferencial exterior “clásica”, $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, vendrá dada por

$$d = \sum_{l+m=k+1} \pi^{k,l} \circ d \quad (4.2.19)$$

Una vez introducidos estos conceptos para variedades casi-complejas en general, veamos una serie de resultados específicos para variedades complejas.

Observación 4.2.6. Partiendo una variedad diferenciable compleja M dimensión n , con coordenadas locales $\{z^j = x^j + iy^j\}_{j=1}^n$, definimos los siguientes elementos de $TM \otimes \mathbb{C}$:

$$\frac{\partial}{\partial z^j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \quad \text{para } j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.2.20)$$

definiéndose de esta forma de modo que $\frac{\partial z^k}{\partial \bar{z}^j} = \delta_j^k$ y $\frac{\partial \bar{z}^k}{\partial z^j} = 0$ (análogamente para \bar{z}^j) para todo j y k . Por su parte, se definen naturalmente los covectores siguientes:

$$dz^j = dx^j + idy^j, \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j, \quad \text{para } j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.2.21)$$

siendo inmediato que se comportan tal como esperaríamos para $\frac{\partial}{\partial z^j}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$. Así mismo, es fácil ver el comportamiento de estos cuatro (co)vectores respecto a J (definido en la Proposición 4.2.2), y que

$$T_{1,0} = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial z^j} \right\}_{j=1}^n \right\rangle_{\mathbb{C}}, \quad T_{0,1} = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right\}_{j=1}^n \right\rangle_{\mathbb{C}}, \quad T^{1,0} = \left\langle \{dz^j\}_{j=1}^n \right\rangle_{\mathbb{C}}, \quad T^{0,1} = \left\langle \{d\bar{z}^j\}_{j=1}^n \right\rangle_{\mathbb{C}}, \quad (4.2.22)$$

pudiendo expresar las formas diferenciales de tipo (l, m) como

$$\Omega^{l,m}(M) = \left\{ \sum_{|H|=l, |K|=m} a_{H,K} dz^H \wedge d\bar{z}^K : a_{H,K} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \right\}, \quad (4.2.23)$$

donde usamos la notación $H = (h_1, \dots, h_l)$ con $1 \leq h_1 < \dots < h_l \leq n$, $|H| = h_1 + \dots + h_l = l$ y $dz^H = dz^{h_1} \wedge \dots \wedge dz^{h_l}$.

Respecto a la expresión en coordenadas de los operadores de Dolbeault, tenemos que de manera inmediata que, dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C})$,

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j, \quad (4.2.24)$$

ya que $df = \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$ y en este caso $d = \pi^{1,0} \circ d + \pi^{0,1} \circ d = \partial + \bar{\partial}$.

Bajo esta notación, veamos dos importantes propiedades de ∂ y $\bar{\partial}$ en variedades complejas.

Proposición 4.2.7. *Dada M una variedad compleja, $d = \partial + \bar{\partial}$ para todas las k -formas de cualquier tipo.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, puesto que las funciones de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ son formas de tipo $(0, 0)$, aplicando la expresión 4.2.19, es inmediato que para estas $d = \partial + \bar{\partial}$. Sea ahora una $\alpha \in \Omega^k(M; \mathbb{C})$ k -forma compleja cualquiera sobre M . Por tener $\Omega^k(M; \mathbb{C}) = \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m}(M)$, tendremos que

$$\alpha = \sum_{l+m=k} \underbrace{\left(\sum_{|H|=l, |K|=m} a_{H,K} dz^H \wedge d\bar{z}^K \right)}_{\in \Omega^{l,m}(M)}, \quad (4.2.25)$$

con $a_{H,K} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$. Aplicando ahora la diferencial exterior, tendremos que

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|H|=l, |K|=m} da_{H,K} \wedge dz^H \wedge d\bar{z}^K \right) = \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|H|=l, |K|=m} (\partial a_{H,K} + \bar{\partial} a_{H,K}) \wedge dz^H \wedge d\bar{z}^K \right) \\ &= \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|H|=l, |K|=m} \partial a_{H,K} \wedge dz^H \wedge d\bar{z}^K \right) + \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|H|=l, |K|=m} \bar{\partial} a_{H,K} \wedge dz^H \wedge d\bar{z}^K \right) = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Puesto que tenemos así que $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$ para toda k -forma en una variedad compleja, se concluye que $d = \partial + \bar{\partial}$. Notar que hemos podido realizar esta demostración en variedades complejas al existir n funciones coordenadas $\{z^j\}_{j=1}^n$, de las cuales el producto exterior de sus diferenciales podemos usar como base de k -formas, lo cual no ocurre en variedades casi-complejas en general. \square

Corolario 4.2.8. *Sobre una variedad compleja se tiene que $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea una forma $\beta \in \Omega^{l,m}(M)$ cualquiera. Como en una variedad compleja $d = \partial + \bar{\partial}$, $d\beta = \partial\beta + \bar{\partial}\beta$, donde $\partial\beta \in \Omega^{l+1,m}(M)$ y $\bar{\partial}\beta \in \Omega^{l,m+1}(M)$. Diferenciando de nuevo, se tiene que $d^2\beta = 0 = \partial^2\beta + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\beta + \bar{\partial}^2\beta$. Puesto que $\partial^2\beta \in \Omega^{l+2,m}(M)$, $(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\beta \in \Omega^{l+1,m+1}(M)$ y $\bar{\partial}^2\beta \in \Omega^{l,m+2}(M)$, concluimos que la única forma de que la suma se anule es que los tres sumandos lo hagan. Así, como esto es válido para todo β , concluimos que $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ (y de hecho también que $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$). \square

Veamos por último un resultado que nos caracteriza las variedades casi-complejas como complejas, para lo que introduciremos en primer lugar el siguiente campo tensorial:

Definición 4.2.9. *Dada una variedad diferenciable M y un campo tensorial $\mathbb{F} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, se define como tensor de Nijenhuis asociado a F , $N_F \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ al dado por*

$$N_F(X, Y) = [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] + F^2[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (4.2.27)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie.

Teorema 4.2.10 (de Newlander-Nirenberg). *Sea (M, J) una variedad casi-compleja, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- I) M es una variedad compleja,
- II) El tensor de Nijenhuis asociado a J se anula, $N_J \equiv 0$.
- III) $d = \partial + \bar{\partial}$
- IV) $\bar{\partial}^2 = 0$

El teorema fue originalmente probado por August Newlander y Louis Nirenberg en 1957 como parte de la tesis doctoral del primero (ver [Newlander, 1957]), y permite caracterizar fácilmente variedades casi-complejas como complejas, teniéndose que la mayoría de variedades casi-complejas no cumplen las características del teorema. Tendremos así la siguiente definición:

Definición 4.2.11. *Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Se dice que J es integrable si todo punto $p \in M$ tiene un entorno U_p con coordenadas locales $\phi_p = (z_p^1, \dots, z_p^n)$ tales que $\{(U_p, \phi_p)\}_{p \in M}$ es un atlas complejo de M en el que la forma casi-compleja canónica de M como variedad compleja, dada por la Proposición 4.2.2, es la propia J .*

4.3. Variedades de Kähler

Consideremos ahora variedades con un triplete compatible (ω, g, J) en las que además J sea integrable, esto es, la variedad sea compleja.

Definición 4.3.1. *Dada una variedad simpléctica (M, ω) , diremos que es una variedad de Kähler si admite una estructura casi-compleja J ω -compatible e integrable. En este caso la forma simpléctica ω se llamará forma de Kähler⁴.*

Al contar de una estructura casi-compleja integrable, se tiene que toda variedad de Kähler M es compleja, cumpliendo además las propiedades que se especifican en el Teorema 4.2.10, y teniendo unas coordenadas complejas locales $\{z^j\}_{j=1}^n$, siendo $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ y $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Respecto a la expresión de la forma de Kähler en dichas coordenadas, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.3.2. *Dada una variedad de Kähler (M, ω) , ω es cerrada para ∂ y $\bar{\partial}$, y en las coordenadas complejas locales canónicas,*

$$\omega = \frac{i}{2} h_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k \quad (4.3.1)$$

con (h_{jk}) determinando una matriz hermítica (esto es, $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$) definida positiva.

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos las propiedades de ω como forma simpléctica compatible con la estructura casi-compleja J . En primer lugar, por ser una 2-forma, tendremos que $\omega \in \Omega^2(M) = \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$, de modo que existirán ciertas funciones $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ tales que

$$\omega = a_{jk} dz^j \wedge dz^k + b_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k + c_{jk} d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k \quad (4.3.2)$$

Ahora, usando que J es compatible con ω , esto es $J^*\omega = \omega$, y que $J^*dz^j = dz^j \circ J = idz^j$ y $J^*d\bar{z}^j = d\bar{z}^j \circ J = -id\bar{z}^j$ (pues $dz^j \in T^{1,0}$ y $d\bar{z}^j \in T^{0,1}$), tendremos,

$$\begin{aligned} 0 = \omega - J^*\omega &= (1 - i^2)a_{jk} dz^j \wedge dz^k + [1 - i(-i)]b_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k + [1 - (-i)^2]c_{jk} d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k \\ &= 2a_{jk} dz^j \wedge dz^k + 2c_{jk} d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

donde hemos usado la Proposición A.2.3 para el comportamiento de la diferencial y producto exterior exterior. Puesto que $dz^j \wedge dz^k$ y $d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k$ son de distinto tipo, la única manera de que se anule la expresión anterior es si $a_{jk} = c_{jk} = 0$ para todo j, k . Tomando $h_{ij} := -2ib_{ij}$, podremos expresar ω como:

$$\omega = \frac{i}{2} h_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k \quad (4.3.4)$$

Veamos pues las propiedades de h_{jk} . En primer lugar, al considerar ω como 2-forma sobre una variedad diferencial real, $\omega(u, v) = \bar{\omega}(u, v) \in \mathbb{R}$ para todo $u, v \in TM$. De este modo, $\omega = \bar{\omega}$. Ahora,

$$\bar{\omega} = -\frac{i}{2} \bar{h}_{jk} d\bar{z}^j \wedge dz^k = \frac{i}{2} \bar{h}_{jk} dz^k \wedge d\bar{z}^j = \frac{i}{2} \bar{h}_{kj} dz^j \wedge d\bar{z}^k, \quad (4.3.5)$$

donde hemos usado que, al tratarse de 1-formas, $d\bar{z}^j \wedge dz^k = -dz^k \wedge d\bar{z}^j$. Igualando $\omega = \bar{\omega}$, se tiene que $\bar{h}_{kj} = h_{jk}$. Para ver ahora que la matriz dada por h_{jk} es definida positiva, usaremos la condición $\omega(u, Ju) > 0$ para todo $u \in TM \setminus \{0\}$ (Proposición 4.1.4). Tomando $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 < \omega(u, Ju) &= \frac{i}{2} h_{jk} (dz^j \wedge \bar{z}^k)(u, Ju) = \frac{i}{2} h_{jk} (dz^j \otimes \bar{z}^k - d\bar{z}^k \otimes z^j)(u, Ju) \\ &= \frac{i}{2} h_{jk} \left[dz^k(u) \underbrace{d\bar{z}^j \circ J(u)}_{-id\bar{z}^k} - d\bar{z}^k(u) \underbrace{dz^j \circ J(u)}_{idz^k} \right] = (h_{jk} dz^j \otimes d\bar{z}^k)(u, u) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Puesto que la podemos expresar la matriz $(h_{jk}) = h_{jk} dz^j \otimes d\bar{z}^k$, tendremos que esta es definida positiva. Aplicando que ω es no degenerada (esto es, $\omega^n \neq 0$), y realizando un reordenamiento similar al de la expresión 3.2.18, se tiene que

$$0 \neq \omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega = n! \left(\frac{i}{2} \right)^n \det(h_{ij}) dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n, \quad (4.3.7)$$

de modo que $\det(h_{ij}) \neq 0$ y la matriz no es singular.

⁴Existe una definición, alternativa y equivalente, de variedad de Kähler. Dada una variedad compleja M de coordenadas locales $\{z^j\}_{j=1}^n$, es siempre posible definir una *métrica hermítica*, esto es, un tensor $h = h_{jk} dz^j \otimes d\bar{z}^k$ tal que es hermítico ($h(u, \bar{v}) = \overline{h(v, u)}$) y definido positivo ($h(u, \bar{u}) > 0$ para $u \neq 0$). A su vez, h tiene asociada una métrica riemanniana, dada por $g = \Re(h) = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$, y una 2-forma de tipo (1,1) asociada, dada por $\omega = \Im(h) = g(i \cdot, \cdot)$. Diremos que M es una *variedad de Kähler* si ω es real y cerrada ($d\omega = 0$). Para más información al respecto se remite a la Sección 9.1 de [Kobayashi, 1969].

Respecto al comportamiento de ω ante los operadores de Dolbeault, usando que es cerrada, tendremos $0 = d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$. Como $\partial\omega$ y $\bar{\partial}\omega$ son formas de distinto tipo, la única posibilidad es que ambas se anulen. \square

Por tanto, dada una variedad de Kähler, sobre las coordenadas complejas canónicas locales $\{z^j\}_{j=1}^n$, la forma de Kähler queda determinada por los coeficientes h_{jk} . Es fácil ver cómo encontrar ahora la métrica Riemanniana g_J que completa el triplete admisible (ω, g_J, J) .

Corolario 4.3.3. *Dada (M, ω) una variedad de Kähler en la que la expresión local de la forma de Kähler es $\omega = \frac{i}{2}h_{jk}dz^j \wedge d\bar{z}^k$, con coordenadas complejas $\{z^i = x^j + iy^j\}_{j=1}^n$, entonces la expresión de la métrica riemanniana g_J asociada a ω y J es*

$$g_J = h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k = h_{jk}(dx^j \otimes dx^k + dy^j \otimes dy^k) \quad (4.3.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Bastará operar:

$$\begin{aligned} g_J &= \omega(\cdot, J\cdot) = \frac{i}{2}h_{jk}(dz^j \wedge d\bar{z}^k)(\cdot, J\cdot) = \frac{i}{2}h_{jk} \left(dz^j \otimes \underbrace{d\bar{z}^k \circ J}_{-id\bar{z}^k} - d\bar{z}^k \otimes \underbrace{dz^j \circ J}_{idz^j} \right) = h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k \\ &= h_{jk}(dx^j + idy^j) \otimes (dx^k - idy^k) = h_{jk}(dx^j \otimes dx^k + dy^j \otimes dy^k) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Puesto que la estructura casi-compleja canónica J es ω -admisble, g_J es métrica riemanniana, siendo inmediato que es simétrica y definida positiva. \square

Por otra parte, veamos a continuación un método para obtener formas de Kähler en una variedad compleja dada, convirtiéndola así en de Kähler.

Proposición 4.3.4. *Sea M una variedad compleja y una función real $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ tal que la matriz $(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k})|_p$ es definida positiva en todo punto $p \in M$ para toda carta local cuyo dominio contenga a p (diremos que ρ es estrictamente plurisubarmónica). Entonces la 2-forma*

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho \quad (4.3.10)$$

es de Kähler. En tal caso se dice que ρ es un potencial de Kähler.

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que ω definida de esta manera es simpléctica, esto es, cerrada, real y no degenerada. Que es cerrada lo tenemos de manera inmediata por

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = \frac{i}{2} \left(\underbrace{\partial^2}_{\bar{0}} \bar{\partial}\rho + \bar{\partial}\partial\bar{\partial}\rho \right) = -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}^2\rho = 0, \quad (4.3.11)$$

donde hemos usado que $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ (Corolario 4.2.8). De esta forma, $\bar{\omega} = -\frac{i}{2}\bar{\partial}\bar{\partial}\rho = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho = \omega$, de modo que es real. Mediante la expresión de $\partial\bar{\partial}\rho$ en coordenadas, tenemos

$$\partial\bar{\partial}\rho = \underbrace{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \right)}_{\in \Omega^{0,1}} = \pi^{1,1} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} dz^j \wedge d\bar{z}^k + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}^j \partial z^k} d\bar{z}^j \wedge dz^k \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} dz^j \wedge d\bar{z}^k \quad (4.3.12)$$

Ahora, como por hipótesis $(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k})|_p$ es definida positiva en todo punto, su determinante será no nulo, y $\omega^n \neq 0$ aplicando la expresión 4.3.7, por lo que ω es no degenerada. Por tanto ω es simpléctica. Ahora, sea J la estructura casi-compleja canónica de M . Puesto que ω es una forma de tipo $(1,1)$, y tenemos que $J^*(dz^j \wedge d\bar{z}^k) = dz^j \circ J \wedge d\bar{z}^k \circ J = -i^2 dz^j \wedge d\bar{z}^k = dz^j \wedge d\bar{z}^k$, se tiene que $J^*\omega = \omega$. Por otro lado, por la expresión 4.3.6, tenemos que $\omega(u, Ju) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} (dz^j \otimes d\bar{z}^k)(u, u) > 0$ al ser ρ estrictamente plurisubarmónica. Por la Proposición 4.1.4 concluimos que J es ω -compatible. \square

El recíproco se cumple localmente, esto es, dada una variedad de Kähler con forma de Kähler ω , para todo punto $p \in M$ existe un entorno abierto U y una función real $\rho \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ tal que en ese entorno $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\rho$. Este resultado se puede interpretar como una “versión compleja” del Lema de Poincaré (Lema A.2.6), si bien requiere del uso avanzado de conceptos de cohomología y grupos de de Rham y de Dolbeault, y que por complejidad y extensión no incluiremos aquí. La prueba aparece íntegra en la subsección “De Rham and Dolbeault Cohomology” del Capítulo 0.2 de [Griffiths, 1978].

4.3.1. Ejemplos de variedades de Kähler. Mostraremos a continuación dos ejemplos, un primero casi trivial y otro más elaborado, de variedades complejas que admiten formas de Kähler.

Ejemplo 4.3.5 (El espacio vectorial \mathbb{C}^n). Consideremos en primer lugar \mathbb{C}^n , con coordenadas globales $\{z^j = x^j + iy^j\}_{j=1}^n$, entendido como variedad diferenciable. Consideremos ahora la función

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z^1, \dots, z^n) & \longmapsto & \sum_{j=1}^n |z^j|^2 = \sum_{j=1}^n z^j \bar{z}^j \end{array} \quad (4.3.13)$$

Es inmediato que esta función es estrictamente plurisubarmónica, ya que

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \right) = \left(\frac{\partial z^k}{\partial z^j} \right) = (\delta_j^k) = \text{Id}_n, \quad (4.3.14)$$

obviamente definida positiva. De esta forma, podremos expresar la forma de Kähler como

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \rho = \frac{i}{2} \delta_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\bar{z}^j = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n (dx^j + idy^j) \wedge (dx^j - idy^j) = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j, \quad (4.3.15)$$

inmediatamente real, y que se corresponde con la expresión canónica de la forma simpléctica dada por el Teorema de Darboux (3.2.11) si entendemos $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Mediante el Corolario 4.3.3 se tiene que la métrica riemanniana que completa el triplete compatible es

$$g_J = \delta_{jk} (dx^j \otimes dx^k + dy^j \otimes dy^k) = \sum_{j=1}^n (dx^j \otimes dx^j + dy^j \otimes dy^j), \quad (4.3.16)$$

tratándose de nuevo de la métrica usual en \mathbb{C}^n .

Ejemplo 4.3.6 (El espacio proyectivo complejo \mathbb{CP}^n y la estructura de Fubini-Study). Veremos ahora una forma de caracterizar al espacio proyectivo complejo de dimensión n , \mathbb{CP}^n , como variedad de Kähler. Este resultado fue introducido en 1904 y 1905 respectivamente por Guido Fubini y Eduard Study (ver [Fubini, 1904] y [Study, 1905]), 25 años antes de que Erich Kähler introdujese las variedades que llevan su nombre en 1930 (ver [Kähler, 1933]).

En primer lugar, recordemos que definimos el espacio proyectivo complejo de dimensión n , \mathbb{CP}^n , como

$$\mathbb{CP}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim, \quad \text{con } z \sim z' \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z' = \lambda z \quad (4.3.17)$$

Denotaremos a los elementos de \mathbb{CP}^n mediante coordenadas homogéneas, de modo que dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $[z] = [z_0 : z_1 : \dots : z_n] = [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \dots : \lambda z_n]$. Ahora, tomemos los conjuntos $A_j = \{[z] = [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : z_j \neq 0\}$, y definamos las cartas

$$\phi_j : \begin{array}{ccc} A_j & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] & \longmapsto & \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right), \end{array} \quad (4.3.18)$$

que es fácil ver que están bien definida. Se puede demostrar que $\mathcal{A} := \{(A_j, \phi_j)\}_{j=1}^n$ constituye un atlas complejo de \mathbb{CP}^n , otorgando a este espacio la estructura de variedad diferenciable compleja de dimensión (compleja) n . Definiendo ahora la función

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \log(|z|^2 + 1) = \log\left(\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j + 1\right) \end{array} \quad (4.3.19)$$

tendremos que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{z_k}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{\delta_{jk} (|z|^2 + 1) - z_k \bar{z}_j}{(|z|^2 + 1)^2} \quad (4.3.20)$$

Dado $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, tendremos que, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en \mathbb{C}^n ,

$$\frac{\delta_{jk} (|z|^2 + 1) - z_k \bar{z}_j}{(|z|^2 + 1)^2} v^j \bar{v}^k = \frac{|v|^2 (|z|^2 + 1) - |\langle v, z \rangle|^2}{(|z|^2 + 1)^2} \geq \frac{|v|^2}{(|z|^2 + 1)^2} > 0, \quad (4.3.21)$$

de modo que $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right)$ es definida positiva, y ρ es estrictamente plurisubarmónica. De este modo, $\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(|z|^2 + 1)$ es una forma de Kähler en \mathbb{C}^n , denominada forma de Fubini-Study en \mathbb{C}^n .

Ahora, dada una carta ϕ_j de atlas \mathcal{A} , tendremos

$$\phi_k^* \rho = \log(|\phi_k([z])|^2 + 1) = \log\left(\frac{\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j - z_k \bar{z}_k}{z_k \bar{z}_k} + 1\right) = \log\left(\frac{|z|^2}{z_k \bar{z}_k}\right) = \log(|z|^2) - \log z_k - \log \bar{z}_k \quad (4.3.22)$$

Puesto que $\partial \bar{\partial} \log z_k = \partial \bar{\partial} \log \bar{z}_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\partial \bar{\partial} \phi_k^* \rho = \partial \bar{\partial} \log |[z]|^2$ tiene la misma expresión independientemente de la carta tomada, por lo que al coincidir sobre las intersecciones de los dominios de estas, se puede definir en todo \mathbb{CP}^n . Respecto al aparente sinsentido de tomar “el módulo de un punto proyectivo”, tenemos que este caso está bien definido, ya que dados $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$[z] = [\lambda z] \Rightarrow |\lambda z|^2 = |\lambda|^2 |z|^2 \Rightarrow \partial \bar{\partial} \log |\lambda z|^2 = \underbrace{\partial \bar{\partial} \log |\lambda|^2}_{=0} + \partial \bar{\partial} \log |z|^2 = \partial \bar{\partial} \log |z|^2 \quad (4.3.23)$$

al ser $\log |\lambda|^2$ constante, de modo que la expresión no depende del representante tomado para obtener el módulo. Por otro lado, para ver que $\tilde{\rho} = \log |[z]|^2$ es un potencial de Kähler, tenemos que comprobar que la matriz asociada $\left(\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}\right)_p$ es definida positiva en todo punto de cada carta local (A_j, ϕ_j) . Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, tomemos (A_0, ϕ_0) , en la que

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \log \left(1 + \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i\right) = \frac{(1 + |z|^2) \delta_{jk} - \bar{z}_j z_k}{(1 + |z|^2)^2} \quad (4.3.24)$$

Como comprobamos anteriormente, esta matriz es definida positiva, de modo que ρ es estrictamente plurisubarmónica, y por tanto $\log |[z]|^2$ es un potencial de Kähler sobre \mathbb{CP}^n . Se define así la forma de Fubini-Study en \mathbb{CP}^n :

$$\omega_{FS, \mathbb{CP}^n} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log |[z]|^2 = \frac{i}{2} \frac{\delta_{jk} |z|^2 - z_k \bar{z}_j}{|z|^4} dz^j \wedge d\bar{z}^k = \frac{i}{2} \left(\delta_{jk} - \frac{z_k \bar{z}_j}{|z|^2} \right) \frac{dz^j}{|z|} \wedge \frac{d\bar{z}^k}{|z|}, \quad (4.3.25)$$

comprobándose que la expresión de $\omega_{FS, \mathbb{CP}^n}$ no depende del representante elegido para $[z] \in \mathbb{CP}^n$. Es inmediato también sobre cada carta (A_k, ϕ_k) que las dos formas de Fubini-Study están relacionadas por $\omega_{FS, \mathbb{CP}^n} = \phi_k^* \omega_{FS}$.

Respecto a la métrica riemanniana asociada en \mathbb{CP}^n , esta tendrá la expresión

$$g_J = \left(\delta_{jk} - \frac{z_k \bar{z}_j}{|z|^2} \right) \frac{dz^j \otimes d\bar{z}^k}{|z|^2} \quad (4.3.26)$$

4.3.2. Comentarios finales sobre variedades simplécticas y de Kähler. Cerremos este trabajo con una serie de apuntes. Se tiene que por definición, dada una variedad simpléctica (M, ω) , ω es cerrada y no degenerada (esto es, $d\omega = 0$ y $\omega^n \neq 0$). Estas propiedades, que en un principio aparecían al generalizar la 2-forma canónica ω_0 sobre el fibrado cotangente en Mecánica Hamiltoniana, en realidad impone fuertes restricciones en el ámbito de la Topología Diferencial.

Dada M una variedad diferenciable de dimensión n cualquiera, y entendiendo $\Omega^k(M)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial y como grupo con la operación suma, definimos los siguientes grupos conmutativos

$$\mathcal{Z}^k(M) = \ker(\{d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\}), \quad \mathcal{B}^k(M) = \text{Im}(\{d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}) \quad (4.3.27)$$

siendo inmediato que se tratan respectivamente de las k -formas cerradas y exactas. Puesto que por la Proposición A.2.5 se tiene que toda forma exacta es cerrada, se tiene $\mathcal{B}^k(M) \subseteq \mathcal{Z}^k(M)$, pudiendo definir el k -ésimo grupo de cohomología de de Rham sobre M como

$$H_{\text{deRham}}^k(M) := \mathcal{Z}^k(M) / \mathcal{B}^k(M), \quad (4.3.28)$$

tratándose de hecho de \mathbb{R} -espacios vectoriales. La cohomología de de Rham es un concepto muy potente, que permite obtener importantes resultados en Topología Algebraica y Diferencial, y estudiarla en profundidad requeriría de un trabajo por sí solo. En nuestro caso concreto, dada (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, ω es una 2-forma cerrada no degenerada, de modo que $0 \neq \omega^k \in \Omega^{2k}(M)$ para $k \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto se tiene que $H_{\text{deRham}}^{2k}(M) \neq \{0\}$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, imponiendo así importantes restricciones sobre las variedades que pueden ser simplécticas. Por ejemplo, se puede demostrar (ver Sección 8.5 de [Conlon, 2001]) que dada una esfera \mathbb{S}^m , los únicos $H_{\text{deRham}}^k(\mathbb{S}^m)$ no triviales son aquellos con $k = 0, m$, siendo en estos casos isomorfos a \mathbb{R} . De esta forma se descarta que toda esfera par de dimensión mayor o igual que 4, \mathbb{S}^{2m} , $m \geq 2$, pueda admitir estructura simpléctica, ya que sus grupos

de cohomología de Rham pares intermedios se anulan.

Sobre variedades complejas (esto es, con $d = \partial + \bar{\partial}$ y $\bar{\partial}^2 = 0$), existe un análogo a la cohomología de de Rham conocida como *cohomología de Dolbeault*, cuyos grupos se definen como

$$H_{\bar{\partial}}^{l,m} := \ker(\{\bar{\partial} : \Omega^{l,m}(M) \rightarrow \Omega^{l,m+1}(M)\}) / \text{Im}(\{\bar{\partial} : \Omega^{l,m-1}(M) \rightarrow \Omega^{l,m}(M)\}) \quad (4.3.29)$$

teniéndose $H_{\bar{\partial}}^{l,m} = \overline{H_{\bar{\partial}}^{m,l}}$ (en el sentido de formas conjugadas). Para una variedad Kähler (M, ω) compacta, el *Teorema de Hodge* (para una descripción de la prueba de este, seguir Sección 17.1 de [Cannas, 2001]) establece que

$$H_{deRham}^k(M; \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{l+m=k} H_{\bar{\partial}}^{l,m}(M), \quad (4.3.30)$$

en lo que se conoce como *descomposición de Hodge*. Denominando respectivamente *números de Betti*⁵ y *números de Hodge* a $b^k(M) := \text{rank } H_{deRham}^k(M)$ y $h^{l,m}(M) := \text{rank } H_{\bar{\partial}}^{l,m}(M)$, es inmediato que

$$b^k = \sum_{l+m=k} h^{l,m}, \quad \text{y} \quad h^{l,m} = h^{m,l} \quad (4.3.31)$$

teniéndose que los números de Betti impares son pares, pues

$$b^{2k+1} = \sum_{l+m=2k+1} h^{l,m} = \sum_{l=1}^{2k+1} h^{l,2k+1-l} + \sum_{m=1}^{2k+1} h^{2k+1-m,m} = 2 \sum_{l=0}^{2k+1} h^{l,2k+1-l} \quad (4.3.32)$$

Como se aprecia, para variedades de Kähler estas relaciones imponen importantes restricciones en la estructura de las variedades, y en la actualidad existe investigación sobre el cálculo de grupos de Dolbeault.

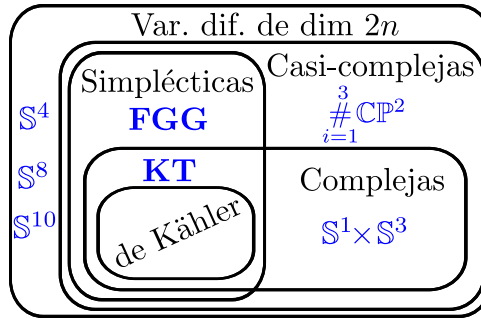


FIGURA 5. Relaciones de contención entre las diferentes clases de variedades estudiadas, así como ejemplos de contenidos estrictos.

A lo largo de este capítulo se ha mostrado la relación entre diferentes clases de variedades: casi-complejas, simpléticas, complejas, de Kähler, cuyas relaciones se muestran en la Figura 5. Terminaremos este trabajo dando algunos ejemplos que muestran que estos “contenidos” son estrictos:

- Las esferas S^4 , S^8 o S^{10} son ejemplos de variedades de dimensión par que no admiten estructuras casi-complejas. De hecho S^2 y S^6 son las únicas esferas que admiten estructuras casi-complejas (ver [Borel, 1953]).
- La suma conexa de tres planos proyectivos complejos, $\#_{i=1}^3 \mathbb{CP}^2$ es casi compleja, pero no es compleja (aplicando la clasificación de superficies complejas, ver [Kodaira, 1964]) ni simplética, como demostró Clifford Taubes en 1994 (ver [Taubes, 1994]).
- La *superficie de Hopf*, $S^1 \times S^3$ no es simplética pues $H_{deRham}^2(S^1 \times S^3) = \{0\}$, pero es compleja puesto que es homeomorfa a $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \Gamma$, con $\Gamma = \{2^n \text{Id}_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}} : n \in \mathbb{Z}\}$.

⁵Los números de Betti $b^k(M)$ se pueden interpretar desde un punto de vista topológico como el número de “agujeros k -dimensionales” de M .

- En 1988 Marisa Fernández, Mark J. Gotay y Alfred Gray (ver [Fernández, 1988]) mostraron que dado el 2-toro \mathbb{T}^2 , \mathcal{E}^3 un fibrado circular sobre \mathbb{T}^2 (esto es, \mathcal{E}^3 es localmente homeomorfo al producto cartesiano de un abierto de \mathbb{T}^2 por \mathbb{S}^1), y \mathcal{E}^4 un fibrado circular sobre \mathcal{E}^3 , con $b^1(\mathcal{E}^4) = 2$, entonces \mathcal{E}^4 admite formas simplécticas, pero no es compleja.
- En 1976 Kunihito Kodaira y William Thurston (ver [Thurston, 1976]) dieron un ejemplo de variedad simpléctica y compleja pero que no es de Kähler, tomando $(\mathbf{KT}, dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2)$ como variedad simpléctica, donde $\mathbf{KT} = \mathbb{R}^4 / \Gamma$, con Γ el grupo de aplicaciones simplécticas de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4 generado por

$$\begin{aligned} \gamma_1 : (x^1, x^2, y^1, y^2) &\mapsto (x^1, x^2 + 1, y^1, y^2) & \gamma_2 : (x^1, x^2, y^1, y^2) &\mapsto (x^1, x^2, y^1, y^2 + 1) \\ \gamma_3 : (x^1, x^2, y^1, y^2) &\mapsto (x^1 + 1, x^2, y^1, y^2) & \gamma_4 : (x^1, x^2, y^1, y^2) &\mapsto (x^1, x^2 + y^2, y^1 + 1, y^2) \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Por la clasificación de Kodaira para variedades complejas se muestra que \mathbf{KT} es complejo, pero sin embargo $b^1(\mathbf{KT}) = 3$ (impar), de modo que \mathbf{KT} no es Kähler. Para un desarrollo más en profundidad sobre la construcción de la variedad \mathbf{KT} , así como otros ejemplos de variedades simplécticas y complejas que no sean Kähler, se referencia a [Bazzoni, 2016].

Termina aquí nuestro (breve) desarrollo acerca de la Geometría Simpléctica, a la cual llegamos buscando una generalización de los conceptos aparecidos al tratar con herramientas de Geometría Diferencial la Mecánica Hamiltoniana (y Lagrangiana). El concepto central de la Geometría Simpléctica, la forma simpléctica ω , no parece distar mucho del tensor métrico g de la Geometría Riemanniana, cambiándose únicamente la simetricidad de g por la antisimetricidad de ω (que obviamente no es definida positiva al tenerse $\omega(u, u) = -\omega(u, u) = 0$). Sin embargo, como se ha visto, al contrario que en la Geometría Riemanniana (donde la curvatura es un concepto puramente local), por el Teorema de Darboux (3.2.11) en la Geometría Simpléctica cualquier par de variedades simplécticas de la misma dimensión son siempre localmente simplectomorfas. Es por esto que el estudio de este tipo de variedades debe hacerse desde un punto de vista global. Al contrario que lo que ocurre en las variedades riemannianas, no toda variedad admite una forma simpléctica, ya que como hemos visto a lo largo del trabajo y en este capítulo más en concreto, se imponen distintos requisitos de carácter dimensional y topológico. La actualidad de los ejemplos (y contraejemplos) mostrados anteriormente ilustran el importante trabajo que se sigue haciendo al respecto. Como se aprecia, la Geometría Simpléctica, ya sea como base para una expresión matemática rigurosa de la Mecánica Clásica, o en relación a otras geometrías basadas en diferentes estructuras, presenta un gran interés, siendo una rama de las Matemáticas que continúa desarrollándose en la actualidad.

Desde el punto de vista “mecánico”, el siguiente paso a que se podría tratar sería la búsqueda de simetrías en los sistemas a describir, siendo estas expresadas como acciones de grupos de Lie, que permitan reducir la dimensión del problema a tratar, junto con funciones o cantidades invariantes (del mismo modo que la energía E se conserva sobre las curvas integrales de los campos hamiltonianos). Aparecen así conceptos como *corchetes de Lagrange y de Poisson*, o el estudio topológico de las diferentes trayectorias que cumplen las curvas integrales de los campos hamiltonianos. Como pasó con la resolución del péndulo doble, en la mayoría de ocasiones no es posible encontrar expresiones explícitas de las curvas integrales. Si bien la resolución numérica de estas permite hacerse una idea del comportamiento de estas, y es indispensable en las aplicaciones prácticas de la Mecánica Analítica, teóricamente resulta más interesante un estudio cualitativo de las familias de soluciones. Para hacerse una idea del amplio campo que cubre el punto de vista geométrico y cualitativo de la Mecánica basta echar un vistazo al índice de [Abraham, 1977], abriéndose un amplio panorama que barre desde los temas ya mencionados a un estudio “probabilístico” (Mecánica Estadística) o incluso la cuantización de sistemas mecánicos.

Desde un punto de vista puramente geométrico, continúa el estudio de las propiedades y fundamentos de la Geometría Simpléctica, así como las relaciones con otras ramas de la Geometría Diferencial, o incluso Algebraica. Por último, si bien obviamente no entraremos en mayor profundidad por cuestiones de extensión, siendo de un gran interés desde un punto de vista tanto mecánico como geométrico, está la *Geometría de Contacto*. Esta estudia sistemas hamiltonianos en los cuales la función hamiltoniana H depende explícitamente del tiempo. Para tratar estos problemas se hace necesario aumentar la dimensionalidad del espacio de fases para incluir a t , de modo que la Geometría de Contacto puede ser vista como la versión “de dimensión impar” de la Geometría Simpléctica, apareciendo muchas veces las variedades de contacto como bordes de variedades simplécticas. Si bien muchos conceptos entre ambas geometrías son análogos, las formas de contacto (equivalente a las simplécticas) poseen propiedades específicas. Mecánicamente, esta geometría es de gran interés en campos como la Termodinámica. Un texto introductorio al respecto puede encontrarse en [Nelson, 2016].

Breve introducción al Cálculo y Álgebra Exterior

Índice

| | |
|---|----|
| A.1. Tensores y formas diferenciales. El álgebra exterior | 51 |
| A.2. Derivadas exteriores y de Lie | 55 |

Introduciremos aquí algunos conceptos de Álgebra Multilineal y Exterior que se utilizan a lo largo del trabajo. Puesto que se tratan en su mayor parte de definiciones básicas y resultados inmediatos, se ha decidido incluirlos en este apéndice, en vez de aparecer en mitad del trabajo, dificultando así su lectura. Se han seguido los Capítulos 1 y 2 de [Warner, 1983] y los Capítulos 1.6, 2.3 y 2.4 de [Abraham, 1977].

A.1. Tensores y formas diferenciales. El álgebra exterior

Introduzcamos en primer lugar el producto tensorial, operación básica para el resto del apéndice.

Definición A.1.1. Sean U y V dos \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión finita, y $F(U, V) := \langle U \times V \rangle$ el \mathbb{R} -espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales de elementos de $U \times V$. Sea ahora $R(U, V)$ el subespacio de $F(U, V)$ generado por elementos del tipo

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

con $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El espacio cociente $V \otimes W := F(V, W)/R(V, W)$ se denomina producto tensorial de V y W . La clase de $V \otimes W$ conteniendo $(v, w) \in F(V, W)$ se denota como $v \otimes w$ y se denomina producto tensorial de v y w . Por la definición de $R(V, W)$, es inmediato que el producto tensorial es bilineal y distributivo respecto a la suma en ambos factores.

Este producto es básico a la hora de introducir los tensores y k -formas. Comencemos sobre espacios vectoriales.

Definición A.1.2. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita y V^* su espacio dual. Consideremos el conjunto de aplicaciones multilineales a \mathbb{R} , $\mathfrak{T}_s^r(V) = L^{r+s}(V^*, \dots, V^*, V, \dots, V; \mathbb{R})$. Diremos que los elementos de $\mathfrak{T}_s^r(V)$ son tensores de tipo $\binom{r}{s}$ sobre V , o de orden contravariante r y covariante s .

Dados $t_1 \in \mathfrak{T}_{s_1}^{r_1}(V)$, $t_2 \in \mathfrak{T}_{s_2}^{r_2}(V)$, se define el producto tensorial de t_1 y t_2 , $t_1 \otimes t_2 \in \mathfrak{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ como

$$t_1 \otimes t_2(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, \beta^1, \dots, \beta^{r_2}, a_1, \dots, a_{s_1}, b_1, \dots, b_{s_2}) := t_1(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, a_1, \dots, a_{s_1}) t_2(\beta^1, \dots, \beta^{r_2}, b_1, \dots, b_{s_2}) \quad (\text{A.1.2})$$

con $\alpha^i, \beta^i \in V^*$ y $a_i, b_i \in V$.

Veamos ahora cómo generar una base de $\mathfrak{T}_s^r(V)$.

Proposición A.1.3. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n , V^* su espacio dual y $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ las respectivas bases. Entonces la dimensión de $\mathfrak{T}_s^r(V)$ es n^{r+s} , y una base está dada por:

$$\mathcal{B}_{r,s} := \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : i_k, j_k \in \{1, \dots, n\}\}$$

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato que $\#\mathcal{B}_{r,s} = n^{r+s}$. Bastará por tanto ver que los elementos de $\mathcal{B}_{r,s}$ son linealmente independientes en \mathbb{R} y generan $\mathfrak{T}_s^r(V)$. Sean $\{t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}\}_{i_k, j_k \in \{1, \dots, n\}} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de coeficientes reales cualesquiera. Aplicando el convenio de sumación de Einstein, supongamos $t := t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} = 0$. Puesto que V es de dimensión finita, se tiene $(V^*)^* \simeq V$, de modo que tendremos $e^i(e_j) = e_j(e^i) = \delta_j^i$. Tomando un elemento cualquiera del producto cartesiano de bases $(e^{l_1}, \dots, e^{l_r}, e_{k_1}, \dots, e_{k_s}) \in (\mathcal{B}^*)^r \times \mathcal{B}^s$, tendremos:

$$0 = (t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s})(e^{l_1}, \dots, e^{l_r}, e_{k_1}, \dots, e_{k_s}) = t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \delta_{i_1}^{l_1} \dots \delta_{i_r}^{l_r} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_s}^{k_s} = t_{k_1, \dots, k_s}^{l_1, \dots, l_r}$$

Repetiendo con todos los elementos de $(\mathcal{B}^*)^r \times \mathcal{B}^s$ se concluye que t es la aplicación nula y todos sus coeficientes son nulos. Por lo tanto los elementos de $\mathcal{B}_{r,s}$ son linealmente independientes.

Por último, puesto que $t \in \mathfrak{T}_s^r(V)$ es aplicación (multi)lineal, quedará determinado por las imágenes de los elementos de la base de su espacio de salida $V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V$, $(\mathcal{B}^*)^r \times \mathcal{B}^s$. Así,

$$t = t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

donde $t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \in \mathbb{R}$. Por tanto $\mathcal{B}_{r,s}$ genera $\mathfrak{T}_s^r(V)$. \square

Una vez dadas estas dos definiciones básicas del Cálculo Tensorial, podemos introducir las ideas referidas al Álgebra Exterior de las que haremos uso.

Definición A.1.4. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita. Definimos $\Omega^0(V) := \mathbb{R}$, $\Omega^1(V) := V^*$, y en general, $\Omega^k(V) := L_a^k(V, \mathbb{R}) \equiv L_a^{0+k}(V, \cdot^k, V; \mathbb{R})$ el espacio vectorial de aplicaciones k -lineales antisimétricas o k -formas exteriores en V .

Esto es, dado $t \in \Omega^k(V)$ y $\sigma \in \mathcal{S}_k$, se tiene $t(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}) = I(\sigma)t(a_1, \dots, a_k)$, donde \mathcal{S}_k es el grupo de permutaciones de k elementos e $I : \mathcal{S}_k \rightarrow \{\pm 1\}$ es homomorfismo índice de permutaciones.

Es inmediato que $\Omega^k(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{T}_k^0(V)$.

Definición A.1.5. Llamamos aplicación alternada $A : \mathfrak{T}_k^0(V) \rightarrow \mathfrak{T}_k^0(V)$ dada por

$$A(t)(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} I(\sigma) t(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}) \quad (\text{A.1.3})$$

Notar que si t es antisimétrica (esto es $t(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}) = I(\sigma)t(a_1, \dots, a_k) \forall \sigma \in \mathcal{S}_k$) se tendrá $A(t) = t$, ya que el orden de \mathcal{S}_k es $k!$. Así, $A|_{\Omega^k(V)} = \text{Id}_{\Omega^k(V)}$.

Introduzcamos finalmente el *producto exterior*:

Definición A.1.6. Sean $\alpha \in \mathfrak{T}_k^0(V)$, $\beta \in \mathfrak{T}_l^0(V)$, introducimos el producto exterior de α y β como

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\alpha \otimes \beta) \in \Omega^{k+l}(V) \quad (\text{A.1.4})$$

En concreto, si $\alpha \in \mathfrak{T}_0^0(V) = \mathbb{R}$, se tiene $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha\beta$.

De manera inmediata se comprueba que $\alpha \wedge \beta$ es antisimétrica y por lo tanto pertenece a $\Omega^{k+l}(V)$. Basta tomar $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{k+l}$ y aplicar la definición:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(a_{\sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma_0(k+l)}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\alpha(a_{\sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma_0(k)})\beta(a_{\sigma_0(k+1)}, \dots, a_{\sigma_0(k+l)})) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} I(\sigma) \alpha(a_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma \circ \sigma_0(k)}) \beta(a_{\sigma \circ \sigma_0(k+1)}, \dots, a_{\sigma \circ \sigma_0(k+l)}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{k+l}} I(\sigma') I(\sigma_0^{-1}) \alpha(a_{\sigma'(1)}, \dots, a_{\sigma'(k)}) \beta(a_{\sigma'(k+1)}, \dots, a_{\sigma'(k+l)}) \\ &= I(\sigma_0^{-1}) \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\alpha(a_{\sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma_0(k)})\beta(a_{\sigma_0(k+1)}, \dots, a_{\sigma_0(k+l)})) \\ &= I(\sigma_0^{-1}) (\alpha \wedge \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) = I(\sigma_0) (\alpha \wedge \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

donde hemos usado que I es homomorfismo al grupo multiplicativo $\{\pm 1\}$, de modo que $I(\sigma_0^{-1}) = I(\sigma_0)$, y que $r_{\sigma_0} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ dado por $r_{\sigma_0}(\sigma) = \sigma \circ \sigma_0$ es isomorfismo.

Veamos ahora algunas propiedades básicas del producto exterior que serán de gran utilidad.

Proposición A.1.7. Sean $\alpha \in \mathfrak{T}_k^0(V)$, $\beta \in \mathfrak{T}_l^0(V)$, $\gamma \in \mathfrak{T}_m^0(V)$. Se tiene:

- I) \wedge es bilinear.
- II) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$
- III) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, para (I) basta usar que tanto \otimes como la aplicación A son lineales por cómo están definidas.

Para (II) tomemos $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{k+l}$ dado por $\sigma_0(1, \dots, k+l) = (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$, del cual es fácil ver que $I(\sigma_0) = (-1)^{kl}$. Se tiene de manera inmediata que $(\alpha \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) = (\beta \otimes \alpha)(a_{\sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma_0(k+l)})$. Por

lo tanto, y utilizando de nuevo que el r_{σ_0} definido anteriormente es isomorfismo, se tiene:

$$\begin{aligned}
 (\alpha \wedge \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\alpha \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\beta \otimes \alpha)(a_{\sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma_0(k+l)}) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} I(\sigma) \beta(a_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, a_{\sigma \circ \sigma_0(k)}) \alpha(a_{\sigma \circ \sigma_0(k+1)}, \dots, a_{\sigma \circ \sigma_0(k+l)}) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{k+l}} I(\sigma') I(\sigma_0^{-1}) \beta(a_{\sigma'(1)}, \dots, a_{\sigma'(k)}) \alpha(a_{\sigma'(k+1)}, \dots, a_{\sigma'(k+l)}) \\
 &= I(\sigma_0^{-1}) (\beta \wedge \alpha)(a_1, \dots, a_{k+l}) = (-1)^{kl} (\beta \wedge \alpha)(a_1, \dots, a_{k+l})
 \end{aligned} \tag{A.1.6}$$

Para (III) veamos primero que el producto tensorial permanece invariante si aplicamos A a alguno de los factores:

$$\begin{aligned}
 A(A(\alpha) \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) &= A(A(\alpha)(a_1, \dots, a_k) \beta(a_{k+1}, \dots, a_{k+l})) \\
 &= A\left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} I(\tau) \alpha(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(k)}) \beta(a_{k+1}, \dots, a_{k+l})\right) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} I(\tau) A(\alpha \otimes \beta)(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(k)}, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau' \in \mathcal{S}_k} I(\tau') A(\alpha \otimes \beta)(a_{\tau'(1)}, \dots, a_{\tau'(k)}, a_{\tau'(k+1)}, \dots, a_{\tau'(k+l)})
 \end{aligned} \tag{A.1.7}$$

donde $\tau' \in \mathcal{S}_{k+l}$ tal que $\tau'(1, \dots, k+l) = (\tau(1), \dots, \tau(k), k+1, \dots, k+l)$ y por tanto $I(\tau') = I(\tau)$. Usando ahora que $A(\alpha \otimes \beta)$ es antisimétrico, tendremos

$$\begin{aligned}
 A(A(\alpha) \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau' \in \mathcal{S}_k} I(\tau') I(\tau') A(\alpha \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) \\
 &= A(\alpha \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l}) \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} 1 \\
 &= A(\alpha \otimes \beta)(a_1, \dots, a_{k+l})
 \end{aligned} \tag{A.1.8}$$

Así se tiene $A(A(\alpha) \otimes \beta) = A(\alpha \otimes \beta)$, y por tanto $A(\alpha) \wedge \beta$. Análogamente se demuestra $\alpha \wedge A(\beta) = \alpha \wedge \beta$. Tendremos entonces, aplicando la asociatividad del producto tensorial

$$\begin{aligned}
 \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= \frac{(l+m)!}{l!m!} \alpha \wedge A(\beta \otimes \gamma) = \frac{(l+m)!}{l!m!} \alpha \wedge (\beta \otimes \gamma) = \frac{(l+m)!(k+l+m)!}{l!m!k!(l+m)!} A(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)) \\
 &= \frac{(k+l)!(k+l+m)!}{l!m!k!(k+l)!} A((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma) = \frac{(k+l+m)}{(k+l)!m!} A(\alpha \otimes \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma
 \end{aligned} \tag{A.1.9}$$

□

Con estos resultados acerca de las propiedades del producto exterior podremos encontrar la dimensión de $\Omega^k(V)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, así como una base asociada.

Proposición A.1.8. *Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n . Se tiene que para $k > n$, $\Omega^k(V) = \{0\}$, y para $k \in \{0, \dots, n\}$, $\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k}$. Dada una base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ y su base dual asociada \mathcal{B}^* , una base de $\Omega^k(V)$ es*

$$\mathcal{B}_k = \{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\} \tag{A.1.10}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, como $\Omega^k(V) \subset \mathfrak{T}_k^0(V)$, por la Proposición A.1.3, tenemos que, aplicando el convenio de sumación de Einstein, dado $\alpha \in \Omega^k(V)$,

$$\alpha = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_k} \otimes \dots \otimes e^{i_1} \tag{A.1.11}$$

Por otro lado, como $\alpha \in \Omega^k(V)$, queda invariante al aplicarle la aplicación alternada A (operador lineal), $\alpha = A\alpha$, por lo que, para $v_1, \dots, v_k \in V$:

$$\begin{aligned}
 \alpha(v_1, \dots, v_k) &= A\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) A(e^{i_k} \otimes \dots \otimes e^{i_1})(v_1, \dots, v_k) \\
 &= \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} I(\sigma) (e^{i_k} \otimes \dots \otimes e^{i_1})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{k!} (e^{i_k} \wedge \dots \wedge e^{i_1})(v_1, \dots, v_k)
 \end{aligned} \tag{A.1.12}$$

donde el último paso es fácilmente demostrable por inducción. Por tanto

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) e^{i_k} \wedge \dots \wedge e^{i_1} \tag{A.1.13}$$

Por ser α antisimétrica, $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ se anula si existen dos índices i_j, i_k iguales. Si $k > n$, por el Ppo. del Palomar esto ocurrirá siempre, por lo que $\Omega^k(V) = \{0\}$. Por otro lado, por tratarse los e^i de 1-formas, $e^i \wedge e^j = (-1)^{1+1} e^j \wedge e^i$, lo que unido a la asociatividad de \wedge , nos permite reordenar $e^{i_k} \wedge \dots \wedge e^{i_1}$

con $i_1 < \dots < i_k$. Al estar sumando en las anteriores expresiones sobre todas las posibles combinaciones $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$, tendremos $k!$ formas de reordenarlas para que estén de menor a mayor. Por tanto

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_k} \wedge \dots \wedge e^{i_1}, \quad (\text{A.1.14})$$

de modo que $\Omega^k(V)$ queda generado por la base deseada. Veamos ahora que sus elementos son linealmente independientes. Sea

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = 0, \quad (\text{A.1.15})$$

para ciertos $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$. Sean $\{i'_1, \dots, i'_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ unos coeficientes fijos escogidos, y sean $\{j_{k+1}, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, n\}$ los restantes. Multiplicando a derecha, tendremos

$$\sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_k \leq k} \alpha_{i'_1, \dots, i'_k} e^{i'_1} \wedge \dots \wedge e^{i'_k} \wedge e^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n} = \sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_k \leq k} \alpha_{i'_1, \dots, i'_k} e^1 \wedge \dots \wedge e^n = 0 \quad (\text{A.1.16})$$

al reordenar los elementos. Puesto que $(e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(e_1, \dots, e_n) = 1$, $e^1 \wedge \dots \wedge e^n \neq 0$, por lo que todos los coeficientes $\alpha_{i'_1, \dots, i'_k}$ son nulos, y los elementos de la base son linealmente independientes. La dimensión de $\Omega^k(V)$ es inmediata al haber $\binom{n}{k}$ formas de seleccionar los índices. \square

Por completitud definiremos la llamada *álgebra de Grassman*.

Definición A.1.9. La suma directa $\Omega(V) := \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \Omega^k(V)$ junto con la estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial y la multiplicación inducida por \wedge se denomina *álgebra exterior* o *de Grassmann* de V .

Proposición A.1.10. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n y $\Omega(V)$ el álgebra de Grassmann definida sobre él. Entonces $\dim \Omega(V) = 2^n$.

DEMOSTRACIÓN. Trivial, aplicando la Proposición A.1.8 y la siguiente identidad:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad (\text{A.1.17})$$

\square

Generalicemos ahora la noción de k -formas sobre un espacio vectorial a variedades diferenciables.

Definición A.1.11. Sea M una variedad diferenciable, $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ su fibrado tangente y $\pi_M : TM \rightarrow M$ la proyección natural. Definamos fibrado vectorial de k -formas exteriores sobre M como

$$\omega^k(M) := \bigcup_{p \in M} \Omega^k(T_p M) \quad (\text{A.1.18})$$

y del mismo modo la proyección natural $\tau_M^k : \omega^k(M) \rightarrow M$. Tomaremos como k -formas exteriores sobre M , $\Omega^k(M)$, al conjunto de secciones diferenciables de $\omega^k(M)$. Esto es,

$$\Omega^k(M) := \{\alpha \in \omega^k(M) \text{ diferenciables} : \tau_M^k \circ \alpha = \text{Id}_M\} \quad (\text{A.1.19})$$

De manera inmediata se tiene $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ y $\Omega^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$, conjunto de 1-formas. Tomando la suma directa $\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$ junto con la estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial (de dimensión infinita) y la multiplicación inducida por \wedge componente a componente, se define el álgebra de formas diferenciales exteriores.

Se comprueba de manera inmediata que sobre $\Omega(M)$ el producto exterior \wedge es lineal en cada componente y asociativo, y que $\Omega(M)$ puede ser visto como $\mathfrak{F}(M)$ -módulo.

Del mismo modo podemos trasladar los tensores a variedades diferenciables:

Definición A.1.12. Sea M una variedad diferenciable y TM su fibrado tangente. Definimos el fibrado tensorial de tensores de tipo $\binom{r}{s}$ al conjunto

$$T_s^r(M) := \bigcup_{p \in M} \mathfrak{T}_s^r(T_p M), \quad (\text{A.1.20})$$

así como la proyección natural $(\tau_M)_s^r : T_s^r(M) \rightarrow M$. Tomaremos como tensores de tipo $\binom{r}{s}$ sobre M al conjunto de secciones diferenciables de $T_s^r(M)$,

$$\mathfrak{T}_s^r(M) := \{t \in T_s^r(M) \text{ diferenciables} : (\tau_M)_s^r \circ t = \text{Id}_M\} \quad (\text{A.1.21})$$

las propiedades de los tensores sobre espacios vectoriales se trasladan fácilmente de los espacios tangentes a M por medio de TM y su proyección natural $\tau_M : TM \rightarrow M$.

A.2. Derivadas exteriores y de Lie

Introduzcamos en esta sección una generalización de la diferencial que lleva funciones reales sobre M a 1-formas sobre M .

Teorema A.2.1. *Sea M una variedad diferenciable. Para cada abierto $U \subseteq M$ existe una única familia de aplicaciones $\{d_U^k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)\}_{k=0}^\infty$, que denotaremos genéricamente de manera individual por d , llamada derivada exterior en M , cumpliendo*

I) d es una antiderivación, esto es, es lineal en \mathbb{R} y dados $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^l(U)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \quad (\text{A.2.1})$$

II) Si $f \in \mathfrak{F}(U)$, df coincide con la diferencial clásica de una función, entendida como 1-forma.

III) $d \circ d = 0$, entendiéndose como $d_U^{k+1} \circ d_U^K = 0$.

IV) d es natural respecto a restricciones, esto es, para todo $U \subseteq V \subseteq M$ abiertos y $\alpha \in \Omega^k(V)$, se tiene $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$.

DEMOSTRACIÓN. Para la existencia, dada $\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k \in \Omega^k(U)$ con $\{f_i\}_{i=0}^k \subseteq \mathfrak{F}(U)$ para cierta carta (x, U) , definimos

$$d\omega := df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k \in \Omega^{k+1}(U), \quad (\text{A.2.2})$$

donde df_i representa la diferencial clásica. Puesto que expresamos $df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$ y el cambio de cartas a (y, U') en coordenadas locales se expresa como

$$dy^l = \frac{\partial y^l}{\partial x^i} dx^i, \quad \frac{\partial f}{\partial y^l} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^l}$$

la expresión A.2.2 es independiente de la carta, y por lo tanto está bien definida. Veamos que cumple las propiedades (I-IV). La propiedad (II) es inmediata dada la definición, y para (IV) basta realizar el cambio de cartas de (x, V) a $(x|_U, U)$ (esta última carta al ser localización de x en un abierto).

Para (I), por la linealidad de la diferencial de funciones de $\mathfrak{F}(U)$, se tiene que d^k es lineal. Ahora, dado $\rho = g_0 dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l \in \Omega^l(U)$, con $\{g_j\}_{j=0}^l \subseteq \mathfrak{F}(U)$, se tiene

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \rho) &= d(f_0 g_0) \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= g_0 df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge dg_l + f_0 dg_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= (df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) \wedge (g_0 dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l) \\ &\quad + (-1)^k (f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) \wedge (dg_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l) \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

donde hemos usado $\alpha \wedge \beta = (-1)^k \beta \wedge \alpha$ (Proposición A.1.7). Para (III) basta comprobar $d \circ df = 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}(U)$. Tomando (x, U) una carta cualquiera:

$$d \circ df = d \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

utilizando la igualdad de derivadas cruzadas y que $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

Veamos por último la unicidad de d . Por linealidad, basta considerar el caso $\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k$ (otras k -formas serán combinaciones lineales de este tipo). Por las propiedades (I) y (III), tendremos que $d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k$, que tiene forma única al tener que por (II) df_0 corresponde con la diferencial convencional. □

Tendremos ahora la manera de computar la diferencial de una k -forma sobre un \mathbb{R} -espacio vectorial (como puede ser el espacio tangente a una variedad en un punto):

Corolario A.2.2. *Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, un subconjunto abierto U de este y $\omega \in \Omega^k(U)$. Entonces*

$$d\omega(u)(e_0, \dots, e_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i J\omega_u(e_i)(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) \quad (\text{A.2.5})$$

donde $J\omega_u(e_i)$ indica el jacobiano de ω en el punto u aplicado sobre e_i , y \hat{e}_i indica que e_i no aparece.

DEMOSTRACIÓN. Es obvio que d es aplicación de $\Omega^k(U)$ a $\Omega^{k+1}(U)$. Veamos que se cumplen las propiedades (I)-(IV) de la proposición anterior. Por la identificación $\Omega^0(U) = \mathfrak{F}(U)$, la propiedad (II) es obvia, lo mismo que (IV) al tratarse de una aplicación lineal que se comporta bien con la restricción. Por la bilinearidad de \wedge , tenemos que entonces $J(\alpha \wedge \beta) = J\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge J\beta$. Junto con el término $(-1)^i$ que aparece en la expresión del sumatorio, se tiene (I). Para (III) se utiliza la misma idea que en la proposición anterior, utilizando la antisimetricidad de \wedge respecto a 1-formas, bastando solo demostrar para elementos de $\mathfrak{F}(U)$. \square

Tendremos también que el producto exterior se comporta bien respecto a aplicaciones diferenciables.

Proposición A.2.3. Sean M y N variedades diferenciables y $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ambas. Entonces $F^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ es homomorfismo de álgebras de formas diferenciables exteriores, pues

- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega(N)$
- d es natural respecto a aplicaciones, esto es, para todo $\alpha \in \Omega(N)$ $d(F^*\alpha) = F^*(d\alpha)$

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar el “buen comportamiento” de F^* con el producto exterior. Consideremos $F : M \rightarrow N$, $\alpha \in \Omega^l(N)$ y $\beta \in \Omega^s(N)$, así como $\{v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_s\} \subset T_p M$ para cierto $p \in M$. Sin especificar que estamos trabajando sobre p , tendremos

$$F^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_s) = (\alpha \wedge \beta)(F_*v_1, \dots, F_*v_l, F_*w_1, \dots, F_*w_s) \quad (\text{A.2.6})$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta(F_*v_1, \dots, F_*v_l, F_*w_1, \dots, F_*w_s) &= \alpha(F_*v_1, \dots, F_*v_l)\beta(F_*w_1, \dots, F_*w_s) \\ &= F^*\alpha(v_1, \dots, v_l)F^*\beta(w_1, \dots, w_s) \\ &= F^*(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_s), \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

Por la definición del producto exterior en base al producto tensorial es obvio que $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$. Trivialmente se extiende este resultado al producto exterior de varias formas diferenciales.

Ahora, puesto que tanto F^* como d son naturales respecto a las restricciones, bastará probar el segundo punto localmente (pudiendo hacer uso de coordenadas). Sea pues $p \in M$ y U un entorno suyo, con coordenadas locales $(x = (x^1, \dots, x^n), V)$ con $U \subseteq V$. Dada ahora $\omega \in \Omega^k(V)$, podremos escribir

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (\text{A.2.8})$$

de modo que aplicando la diferencial exterior,

$$d\omega = \underbrace{\frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^a} dx^a}_{d\omega_{i_1, \dots, i_k}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^{k+1}(V) \quad (\text{A.2.9})$$

Restringiendo sobre U y aplicando el primer punto de esta proposición, ya probado,

$$F^*(d\omega)|_U = F^*(d\omega_{i_1, \dots, i_k}) \wedge F^*dx^{i_1} \wedge \dots \wedge F^*dx^{i_k} = d(F^*\omega|_U), \quad (\text{A.2.10})$$

donde hemos usado que las funciones $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in \mathfrak{F}(V)$, por lo que $F^*\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega_{i_1, \dots, i_k} \circ F$, y aplicando la regla de la cadena, por la cual dado $\rho \in \mathfrak{F}(N)$, $F^*d\rho(p) = d\rho_{F(p)} \circ F_* = d(\rho \circ F)$, al estar dado F_* por la matriz jacobiana de F . \square

Dos importantes características de las formas diferenciales en relación a la derivada exterior son las siguientes:

Definición A.2.4. Sea M una variedad diferenciable. Dada $\omega \in \Omega^k(M)$, se dice cerrada si $d\omega = 0$, y exacta si existe $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\beta$.

Proposición A.2.5. Toda forma exacta es cerrada.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata usando que $d \circ d = 0$. Dada $\omega \in \Omega^k(M)$ exacta con $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\beta$, $d\omega = d(d\beta) = (d \circ d)\beta = 0$. \square

El recíproco es únicamente cierto localmente, como mostramos a continuación:

Lema A.2.6 (de Poincaré). Sea M una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces para todo $x \in M$ existe un entorno U de x tal que $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que hemos visto en A.2.1 (iv) que d es natural respecto a restricciones, y por A.2.3 (ii) que lo es respecto a aplicaciones diferenciables, bastará tomar una carta local (ϕ, U) de M tal que $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ sea un disco alrededor del origen, y probar el resultado para $\omega \in \Omega^k(\phi(U))$. La idea será construir una aplicación lineal $H : \Omega^k(\phi(U)) \rightarrow \Omega^{k-1}(\phi(U))$, tal que $d \circ H + H \circ d = \text{Id}_{\Omega^k(\phi(U))}$. De este modo, dada $\omega \in \Omega^k(\phi(U))$ cerrada, tendremos

$$d(H\omega) = d(H\omega) + H(0) = d(H\omega) + H(d\omega) = (d \circ H + H \circ d)\omega = \text{Id}_{\Omega^k(\phi(U))}(\omega) = \omega \quad (\text{A.2.11})$$

Para ello, definamos H de la siguiente forma. Dado $\omega \in \Omega^k(\phi(U))$, $u \in \phi(U)$ y $\{x_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, recordando que el espacio de llegada de H es $\Omega^{k-1}(\phi(U))$:

$$H\omega(u)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \int_0^1 t^{k-1} \omega(u, e_1, \dots, e_k) dt \quad (\text{A.2.12})$$

siendo trivialmente lineal y estando bien definida, pues el segmento que une el origen con u está dentro del disco anteriormente definido. Ahora, obteniendo el diferencial

$$\begin{aligned} dH\omega(u)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} JH\omega_u(v_i)(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_0^1 [kt^{k-1} \omega(tu)(e_i, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) + t^k J\omega_{tu}(e_i)(u, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k)] dt \\ &= \int_0^1 kt^{k-1} \omega(tu)(e_i, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) dt + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_0^1 t^k J\omega_{tu}(e_i)(u, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) dt \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

donde el $i+1$ de $(-1)^{i+1}$ aparece al numerar nuestras coordenadas empezando por el 1 en vez de por el 0, y se ha podido diferenciar bajo el símbolo integral al ser ω diferenciable y acotada en el dominio. Por otro lado,

$$\begin{aligned} Hd\omega(u)(v_1, \dots, v_k) &= \int_0^1 t^k \omega(u)(u, v_1, \dots, v_k) dt \\ &= \int_0^1 J\omega_{tu}(u)(v_1, \dots, v_k) dt + \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_0^1 t^k J\omega_{tu}(v_i)(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

En ambos casos se ha separado el primer factor ($i=0$), asociado al vector u , del resto. Ahora, sumando ambas expresiones y observando que el segundo sumando es el mismo en ambos, con signo opuesto,

$$\begin{aligned} [dH\omega(u) + Hd\omega(u)](v_1, \dots, v_k) &= \int_0^1 kt^{k-1} \omega(tu)(e_i, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) dt + \int_0^1 J\omega_{tu}(u)(v_1, \dots, v_k) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k \omega(tu)(v_1, \dots, v_k)] dt = \omega(u)(v_1, \dots, v_k) \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

quedando probado el lema. \square

Definimos por último dos conceptos, relacionados con la derivada exterior, así como las propiedades básicas de las cuales haremos uso.

Definición A.2.7. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$. Denominamos producto interno de X y ω a $\iota_X \omega \in \mathfrak{T}_k^0(M)$ dado por

$$\begin{aligned} \iota_X \omega : \quad \mathfrak{X}(M)^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_k) &\longmapsto \iota_X \omega(X_1, \dots, X_k) := \omega(X, X_1, \dots, X_k) \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

Si $\omega \in \Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$, $\iota_X \omega = 0$.

Esta “operación”, que vemos que funciona como una especie de contracción de $\Omega^k(M)$ a $\Omega^{k-1}(M)$, tiene las siguientes propiedades:

Proposición A.2.8. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, el producto interno $\iota_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ funciona como un operador en $\Omega(M)$, de modo que para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$, cumple

- I) ι_X es una \wedge -antiderivación. Esto es, es lineal en \mathbb{R} y $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)$.
- II) $\iota_{fX} \alpha = f \iota_X \alpha$ y $\iota_{X+Y} \alpha = \iota_X \alpha + \iota_Y \alpha$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar (I) basta ver que $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)$, pues la linealidad es inmediata por definición. Ahora bien,

$$(\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta) = \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} A(\iota_X \alpha \otimes \beta) + (-1)^k \frac{(k+l-1)!}{k!(l-1)!} A(\alpha \otimes \iota_X \beta) \quad (\text{A.2.17})$$

donde A es la aplicación alternada, dada por la definición A.1.5. Ahora bien,

$$\begin{aligned} A(\alpha \otimes \iota_X \beta)(X_2, \dots, X_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l-1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l-1}} I(\sigma) \alpha(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) \beta(X, X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= (-1)^k \frac{1}{(k+l-1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l-1}} I(\sigma) \alpha(X, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{k+1}, X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= (-1)^k A(\iota_X \alpha \otimes \beta)(X_2, \dots, X_{k+l}), \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

donde el $(-1)^k$ aparece al sumar sobre $\sigma\sigma_0$ en vez de sobre $\sigma \in \mathcal{S}_{k+l-1}$, donde σ_0 lleva $(2, 3, \dots, k+1, 1, k+2, \dots, k+l)$ a $(1, 2, \dots, k+l)$, con $I(\sigma_0) = (-1)^k$. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta) &= \left[\frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} + (-1)^{2k} \frac{(k+l-1)!}{k!(l-1)!} \right] A(\iota_X \alpha \otimes \beta) = \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\iota_X \alpha \otimes \beta) \\ &= \iota_X(\alpha \wedge \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

Para (II) basta notar que evaluadas sobre cada punto $p \in M$, las formas exteriores se comportan como aplicaciones multilineales. \square

Introduzcamos por último el concepto de *derivada de Lie* de formas, del cual, si bien no realizaremos un uso extensivo, será importante para algunas demostraciones del Capítulo 3.

Definición A.2.9. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M . Dada $f \in \mathfrak{F}(M)$, denominamos derivada de Lie de f respecto a X a $\mathcal{L}_X f$, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto L_X f(m) := df(m)[X(m)] \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

entendiendo $df \in \mathfrak{X}^*(M)$

Puesto que dado $f \in \mathfrak{F}(M)$ $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, es inmediato que $\mathcal{L}_X(f) \in \mathfrak{F}(M)$, y que $\mathcal{L}_X(f) = \iota_X df$.

La derivada de Lie representa la variación de la función f en el punto $m \in M$ en el que es evaluada a lo largo de las curvas integrales del campo X , y traslada el concepto de derivada direccional de \mathbb{R}^n a variedades diferenciables generales, en el que este concepto no está bien definido al no conservarse por cambios de coordenadas.

En este trabajo necesitaremos únicamente trabajar con derivadas de Lie de formas¹, que generalizamos desde $\mathfrak{F}(M)$ como:

Definición A.2.10. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M . Definimos la derivada de Lie de k -formas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\longmapsto \mathcal{L}_X \omega := d(\iota_X \omega) + \iota_X(d\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.2.21})$$

Se comprueba de manera inmediata, sin más que realizar las cuentas, que \mathcal{L}_X es una \wedge -derivación (cumple la regla de Leibniz, $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$) en $\Omega(M)$, por tenerse que, dadas α y β respectivamente k y l -formas exteriores y X un campo vectorial sobre M ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= d[\iota_X(\alpha \wedge \beta)] + \iota_X[d(\alpha \wedge \beta)] \\ &= d[(\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)] + \iota_X[(d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)] \\ &= d[(\iota_X \alpha) \wedge \beta] + (-1)^k d[\alpha \wedge (\iota_X \beta)] + \iota_X[(d\alpha) \wedge \beta] + (-1)^k \iota_X[\alpha \wedge (d\beta)] \\ &= d(\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} \iota_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge \iota_X \beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge d(\iota_X \beta) \\ &\quad + \iota_X(d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} d\alpha \wedge (\iota_X \beta) + (-1)^k \iota_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge \iota_X(d\beta) \\ &= (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

y por otra parte ser \mathcal{L}_X trivialmente \mathbb{R} -lineal.

¹Si bien no se utilizará, como curiosidad se indica que la *derivada de Lie de un campo* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ respecto a otro $X \in \mathfrak{X}(M)$ se corresponde con el corchete de Lie de estos, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, cumpliéndose $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$, y como operador $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$.

Código en Wolfram Mathematica para la resolución y representación del péndulo doble

Introducimos el Lagrangiano a partir de la energía potencial y cinética

- Las derivadas de θ_1 y θ_2 las denominaremos por ω_1 y ω_2 , respectivamente

```
In[1]:= V1[θ1_, θ2_] = -g * m1 * l1 * Cos[θ1];
           |coseno
V2[θ1_, θ2_] = -g * m2 * (l1 * Cos[θ1] + l2 * Cos[θ2]);
           |coseno      |coseno
T1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = 1/2 * m1 * l1^2 * ω1^2;
T2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = 1/2 * m2 *
  ((l1 * ω1 * Cos[θ1] + l2 * ω2 * Cos[θ2])^2 + (l1 * ω1 * Sin[θ1] + l2 * ω2 * Sin[θ2])^2);
           |coseno      |coseno      |seno      |seno
V[θ1_, θ2_] = V1[θ1, θ2] + V2[θ1, θ2];
T[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = T1[θ1, θ2, ω1, ω2] + T2[θ1, θ2, ω1, ω2];
L[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[Expand[T[θ1, θ2, ω1, ω2] - V[θ1, θ2]]]
           |simplifica |expande factores
```

```
Out[1]= 1/2 (l1^2 m1 ω1^2 + l1^2 m2 ω1^2 + l2^2 m2 ω2^2 +
  2 g l1 (m1 + m2) Cos[θ1] + 2 l1 l2 m2 ω1 ω2 Cos[θ1 - θ2] + 2 g l2 m2 Cos[θ2])
```

Obtenemos las derivadas primeras y segundas del lagrangiano

- Derivadas primeras

```
In[2]:= Lθ1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], θ1]]
           |simplifica |deriva
Out[2]= -g l1 (m1 + m2) Sin[θ1] - l1 l2 m2 ω1 ω2 Sin[θ1 - θ2]

In[3]:= Lθ2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], θ2]]
           |simplifica |deriva
Out[3]= l2 m2 (l1 ω1 ω2 Sin[θ1 - θ2] - g Sin[θ2])

In[4]:= Lω1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω1]]
           |simplifica |deriva
Out[4]= l1 (l1 (m1 + m2) ω1 + l2 m2 ω2 Cos[θ1 - θ2])

In[5]:= Lω2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω2]]
           |simplifica |deriva
Out[5]= l2 m2 (l2 ω2 + l1 ω1 Cos[θ1 - θ2])
```

- Derivadas segundas

```
In[6]:= Lω1θ1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω1, θ1]]
           |simplifica |deriva
Out[6]= -l1 l2 m2 ω2 Sin[θ1 - θ2]

In[7]:= Lω1θ2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω1, θ2]]
           |simplifica |deriva
Out[7]= l1 l2 m2 ω2 Sin[θ1 - θ2]
```

```
In[8]:= L ω2θ1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω2, θ1]]
[simplifica deriva]
```

```
Out[8]= -l1 l2 m2 ω1 Sin[θ1 - θ2]
```

```
In[9]:= L ω2θ2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω2, θ2]]
[simplifica deriva]
```

```
Out[9]= l1 l2 m2 ω1 Sin[θ1 - θ2]
```

```
In[10]:= L ω1ω1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω1, ω1]]
[simplifica deriva]
```

```
Out[10]= l12 (m1 + m2)
```

```
In[11]:= L ω1ω2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω1, ω2]]
[simplifica deriva]
```

```
Out[11]= l1 l2 m2 Cos[θ1 - θ2]
```

```
In[12]:= L ω2ω2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[D[L[θ1, θ2, ω1, ω2], ω2, ω2]]
[simplifica deriva]
```

```
Out[12]= l22 m2
```

Comprobamos la descomposición homogénea del lagrangiano:

```
In[13]:= TrueQ[
  ¿verdadero?
  L ω1[θ1, θ2, ω1, ω2] == Simplify[L ω1ω1[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω1 + L ω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω2]]
[simplifica]
```

```
Out[13]= True
```

```
In[14]:= TrueQ[
  ¿verdadero?
  L ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] == Simplify[L ω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω1 + L ω2ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω2]]
[simplifica]
```

```
Out[14]= True
```

Obtendremos la acción y energía asociadas al Lagrangiano L, comprobando que la energía se corresponde con la clásica E=T+V

```
In[15]:= A[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[L ω1[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω1 + L ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * ω2]
[simplifica]
```

```
Out[15]= l12 (m1 + m2) ω12 + l22 m2 ω22 + 2 l1 l2 m2 ω1 ω2 Cos[θ1 - θ2]
```

```
In[16]:= En[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[A[θ1, θ2, ω1, ω2] - L[θ1, θ2, ω1, ω2]]
[simplifica]
```

```
Out[16]= 
$$\frac{1}{2} \left( l1^2 m1 \omega1^2 + l1^2 m2 \omega1^2 + l2^2 m2 \omega2^2 - \right. \\ \left. 2 g l1 (m1 + m2) \cos[\theta1] + 2 l1 l2 m2 \omega1 \omega2 \cos[\theta1 - \theta2] - 2 g l2 m2 \cos[\theta2] \right)$$

```

Comprobamos que la energía total se corresponda con la suma de cinética y potencial, y que la acción sea dos veces la energía cinética

```
In[17]:= TrueQ[En[θ1, θ2, ω1, ω2] == Simplify[Expand[T[θ1, θ2, ω1, ω2] + V[θ1, θ2]]]]
[¿verdadero? simplifica expande factores]
```

```
Out[17]= True
```



```
In[18]:= TrueQ[A[θ1, θ2, ω1, ω2] == Simplify[Expand[2 * T[θ1, θ2, ω1, ω2]]]]
      |_¿verdadero?      |_simplifica |_expande factores
```

```
Out[18]= True
```

Obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L

```
In[19]:= eqsEL = {Simplify[D[Lw1[θ1[t], θ2[t], D[θ1[t], t], D[θ2[t], t]], t] ==
      |_simplifica |_deriva      |_deriva      |_deriva
      Lθ1[θ1[t], θ2[t], D[θ1[t], t], D[θ2[t], t]], l1 > 0 && l2 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0],
      Simplify[D[Lw2[θ1[t], θ2[t], D[θ1[t], t], D[θ2[t], t]], t] ==
      |_simplifica |_deriva      |_deriva      |_deriva
      Lθ2[θ1[t], θ2[t], D[θ1[t], t], D[θ2[t], t]], l1 > 0 && l2 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]}
```

```
Out[19]= {g m1 Sin[θ1[t]] + g m2 Sin[θ1[t]] + l2 m2 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 +
      l1 (m1 + m2) θ1''[t] + l2 m2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t] == 0,
      g Sin[θ2[t]] + l1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + l2 θ2''[t] == l1 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2}
```

Hagamos ahora las cuentas necesarias para obtener el campo vectorial lagrangiano X_E

- Expresamos las 2-formas implicadas de manera simbólica

```
In[20]:= dθ1dθ2[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ1, dθ2] - TensorProduct[dθ2, dθ1]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[20]= dθ1⊗dθ2 - dθ2⊗dθ1
```

```
In[21]:= dθ2dθ1[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ2, dθ1] - TensorProduct[dθ1, dθ2]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[21]= -dθ1⊗dθ2 + dθ2⊗dθ1
```

```
In[22]:= dθ1dω1[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ1, dω1] - TensorProduct[dω1, dθ1]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[22]= dθ1⊗dω1 - dω1⊗dθ1
```

```
In[23]:= dθ1dω2[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ1, dω2] - TensorProduct[dω2, dθ1]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[23]= dθ1⊗dω2 - dω2⊗dθ1
```

```
In[24]:= dθ2dω1[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ2, dω1] - TensorProduct[dω1, dθ2]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[24]= dθ2⊗dω1 - dω1⊗dθ2
```

```
In[25]:= dθ2dω2[dθ1_, dθ2_, dω1_, dω2_] = TensorProduct[dθ2, dω2] - TensorProduct[dω2, dθ2]
      |_producto tensorial      |_producto tensorial
```

```
Out[25]= dθ2⊗dω2 - dω2⊗dθ2
```

- Comprobamos la 2-forma de Lagrange

```
In[26]:= wL[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[Expand[
  Lω1θ2[θ1, θ2, ω1, ω2] * dθ1dθ2[dθ1, dθ2, dω1, dω2] + Lω2θ1[θ1, θ2, ω1, ω2] *
  dθ2dθ1[dθ1, dθ2, dω1, dω2] + Lω1ω1[θ1, θ2, ω1, ω2] * dθ1dω1[dθ1, dθ2, dω1, dω2] +
  Lω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * dθ1dω2[dθ1, dθ2, dω1, dω2] + Lω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] *
  dθ2dω1[dθ1, dθ2, dω1, dω2] + Lω2ω2[θ1, θ2, ω1, ω2] * dθ2dω2[dθ1, dθ2, dω1, dω2]]]
```

```
Out[26]:= 11 12 m2 (ω1 + ω2) Sin[θ1 - θ2] dθ1⊗dθ2 + 11^2 (m1 + m2) dθ1⊗dω1 + 11 12 m2 Cos[θ1 - θ2] dθ1⊗dω2 -
  11 12 m2 ω1 Sin[θ1 - θ2] dθ2⊗dθ1 - 11 12 m2 ω2 Sin[θ1 - θ2] dθ2⊗dθ1 +
  11 12 m2 Cos[θ1 - θ2] dθ2⊗dω1 + 12^2 m2 dθ2⊗dω2 - 11^2 m1 dω1⊗dθ1 - 11^2 m2 dω1⊗dθ1 -
  11 12 m2 Cos[θ1 - θ2] dω1⊗dθ2 - 11 12 m2 Cos[θ1 - θ2] dω2⊗dθ1 - 12^2 m2 dω2⊗dθ2
```

- Comprobamos que el sistema de ecuaciones que nos da las componentes Z_1 y Z_2 del campo vectorial lagrangiano X_E=(Y_1,Y_2,Z_1,Z_2) tiene siempre solución:

```
In[27]:= ML[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = {{Lω1ω1[θ1, θ2, ω1, ω2], Lω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2]},
  {Lω1ω2[θ1, θ2, ω1, ω2], Lω2ω2[θ1, θ2, ω1, ω2]}};
```

```
Simplify[Det[ML[θ1, θ2, ω1, ω2]]]
[simplifica [determinante]
```

```
Out[27]:= 11^2 12^2 m2 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)
```

```
In[28]:= MLinv[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_] = Simplify[Inverse[ML[θ1, θ2, ω1, ω2]]]
[simplifica [matriz inversa]
```

```
Out[28]:= {{ 1 / (11^2 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)), - Cos[θ1 - θ2] / (11 12 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)) },
  { - Cos[θ1 - θ2] / (11 12 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)), (m1 + m2) / (12^2 m2 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)) }}
```

Obtenemos la expresión de Z_1 y Z_2

```
In[29]:= {Z1[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_], z2[θ1_, θ2_, ω1_, ω2_]} =
  Simplify[Together[-MLinv[θ1, θ2, ω1, ω2].
    {Lθ1[θ1, θ2, ω1, ω2] + ω1 * Lω1θ1[θ1, θ2, ω1, ω2] + ω2 * Lω1θ2[θ1, θ2, ω1, ω2],
    Lθ2[θ1, θ2, ω1, ω2] + ω1 * Lω2θ1[θ1, θ2, ω1, ω2] + ω2 * Lω2θ2[θ1, θ2, ω1, ω2]}],
  11 > 0 && 12 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]
```

```
Out[29]:= { (g (2 m1 + m2) Sin[θ1] + g m2 Sin[θ1 - 2 θ2] -
  2 m2 (12 ω2 (-2 ω1 + ω2) + 11 ω1 (ω1 - 2 ω2) Cos[θ1 - θ2]) Sin[θ1 - θ2]) /
  (2 11 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)),
  ((11 (m1 + m2) ω1 (ω1 - 2 ω2) - g (m1 + m2) Cos[θ1] - 12 m2 (2 ω1 - ω2) ω2 Cos[θ1 - θ2])
  Sin[θ1 - θ2]) / (12 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)) }
```

Obtenemos la expresión de ω1 y ω2 en función de los momentos generalizados μ1 y μ2

```
In[30]:= {Ω1[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_], Ω2[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_]} =
  Simplify[Together[MLinv[θ1, θ2, ω1, ω2].{μ1, μ2}], 11 > 0 && 12 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]
[simplifica [agrupa]
```

```
Out[30]:= { 12 μ1 - 11 μ2 Cos[θ1 - θ2] / (11^2 12 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)), - 11 (m1 + m2) μ2 + 12 m2 μ1 Cos[θ1 - θ2] / (11 12^2 m2 (m1 + m2 - m2 Cos[θ1 - θ2]^2)) }
```

Introducimos el hamiltoniano:

```
In[31]:= H[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_] =
  (12^2 * μ1^2 + 11^2 * (1 + m1/m2) * μ2^2 - 2 * l1 * l2 * μ1 * μ2 * Cos[θ1 - θ2]) /
    Coseno
  (2 * l1^2 * l2^2 * (m1 + m2 * Sin[θ1 - θ2]^2)) -
    seno
  g * (m1 + m2) * l1 * Cos[θ1] - g * m2 * l2 * Cos[θ2]
    Coseno Coseno
Simplify[En[θ1, θ2, Ω1[θ1, θ2, μ1, μ2], Ω2[θ1, θ2, μ1, μ2]]]
Simplifica
```

```
Out[31]= -g l1 (m1 + m2) Cos[θ1] - g l2 m2 Cos[θ2] +
  (12^2 μ1^2 + 11^2 (1 + m1/m2) μ2^2 - 2 l1 l2 μ1 μ2 Cos[θ1 - θ2]) /
    2 l1^2 l2^2 (m1 + m2 Sin[θ1 - θ2]^2)
```

```
Out[32]= -
  1
  11^2 l2^2 m2 (-2 m1 - m2 + m2 Cos[2 (θ1 - θ2)])
  (12^2 m2 μ1^2 + 11^2 m1 μ2^2 + 11^2 m2 μ2^2 - 2 l1 l2 m2 μ1 μ2 Cos[θ1 - θ2] +
    g l1^3 l2^2 m2 (m1 + m2) Cos[θ1] (-2 m1 - m2 + m2 Cos[2 (θ1 - θ2)]) -
    2 g l1^2 l2^3 m1 m2^2 Cos[θ2] - 2 g l1^2 l2^3 m2^3 Cos[θ2] + 2 g l1^2 l2^3 m2^3 Cos[θ1 - θ2]^2 Cos[θ2])
```

¿Coincide el hamiltoniano con la energía total?

```
In[33]:= TrueQ[H[θ1, θ2, μ1, μ2] == En[θ1, θ2, Ω1[θ1, θ2, μ1, μ2], Ω2[θ1, θ2, μ1, μ2]]]
  ¿verdadero?
```

```
Out[33]= False
```

- En realidad las dos expresiones Sí coinciden, como se comprueba fácilmente con lápiz y papel. Wolfram Mathematica tiene sus limitaciones, por lo que es necesario comprobar los resultados que nos parezcan sospechosos.

Obtenemos las derivadas del Hamiltoniano

```
In[34]:= Hμ1[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_] =
  Simplify[D[H[θ1, θ2, μ1, μ2], μ1], l1 > 0 && l2 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]
  Simplifica Deriva
```

```
Out[34]= (12 μ1 - 11 μ2 Cos[θ1 - θ2]) /
  l1^2 l2 (m1 + m2 Sin[θ1 - θ2]^2)
```

```
In[35]:= Hμ2[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_] =
  Simplify[D[H[θ1, θ2, μ1, μ2], μ2], l1 > 0 && l2 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]
  Simplifica Deriva
```

```
Out[35]= (11 (m1 + m2) μ2 - 12 m2 μ1 Cos[θ1 - θ2]) /
  l1 l2^2 m2 (m1 + m2 Sin[θ1 - θ2]^2)
```

```
In[36]:= Hθ1[θ1_, θ2_, μ1_, μ2_] =
  Simplify[D[H[θ1, θ2, μ1, μ2], θ1], l1 > 0 && l2 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]
  Simplifica Deriva
```

```
Out[36]= g l1 (m1 + m2) Sin[θ1] +
  ((-11 (m1 + m2) μ2 + 12 m2 μ1 Cos[θ1 - θ2]) (-12 μ1 + 11 μ2 Cos[θ1 - θ2]) Sin[θ1 - θ2]) /
  (l1^2 l2^2 (m1 + m2 Sin[θ1 - θ2]^2)^2)
```

```
In[37]:= H02[01_, 02_, 01_, 02_] =  
Simplify[D[H[01, 02, 01, 02], 02], 11 > 0 && 12 > 0 && m1 > 0 && m2 > 0]  
[simplifica] [deriva]
```

$$\text{Out[37]} = \frac{\left(\cos[\theta_1 - \theta_2] \left(12^2 m_2 \mu_1^2 + 11^2 (m_1 + m_2) \mu_2^2 - 2 l_1 l_2 m_2 \mu_1 \mu_2 \cos[\theta_1 - \theta_2] \right) \sin[\theta_1 - \theta_2] \right)}{\left(11^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1 - \theta_2]^2)^2 \right) - \frac{\mu_1 \mu_2 \sin[\theta_1 - \theta_2]}{11 l_2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1 - \theta_2]^2)} + g l_2 m_2 \sin[\theta_2]}$$

Las ecuaciones de Hamilton serán las siguientes:

```
In[38]:= eqsHam = {01'[t] == H01[01[t], 02[t], 01[t], 02[t]],  
02'[t] == H02[01[t], 02[t], 01[t], 02[t]],  
01'[t] == -H01[01[t], 02[t], 01[t], 02[t]],  
02'[t] == -H02[01[t], 02[t], 01[t], 02[t]]}
```

$$\begin{aligned} \text{Out[38]} = \{ & \theta_1'[t] = \frac{12 \mu_1[t] - l_1 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_2[t]}{11^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]]^2)}, \\ & \theta_2'[t] = \frac{-12 m_2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_1[t] + l_1 (m_1 + m_2) \mu_2[t]}{11 l_2^2 m_2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]]^2)}, \\ & \mu_1'[t] = -g l_1 (m_1 + m_2) \sin[\theta_1[t]] - \\ & \quad \left(\sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] (12 m_2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_1[t] - l_1 (m_1 + m_2) \mu_2[t]) \right. \\ & \quad \left. (-12 \mu_1[t] + l_1 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_2[t]) \right) / \left(11^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]]^2)^2 \right), \\ & \mu_2'[t] = -g l_2 m_2 \sin[\theta_2[t]] + \frac{\sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_1[t] \mu_2[t]}{11 l_2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]]^2)} - \\ & \quad \left(\cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \right. \\ & \quad \left. (12^2 m_2 \mu_1[t]^2 - 2 l_1 l_2 m_2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \mu_1[t] \mu_2[t] + l_1^2 (m_1 + m_2) \mu_2[t]^2) \right) / \\ & \quad \left(11^2 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]]^2)^2 \right) \} \end{aligned}$$

Obtenemos la acción hamiltoniana G

```
In[39]:= G[01_, 02_, 01_, 02_] = Simplify[A[01, 02, 01[01, 02, 01, 02], 02[01, 02, 01, 02]]]  
[simplifica]
```

$$\text{Out[39]} = - \frac{-12^2 m_2 \mu_1^2 - 11^2 (m_1 + m_2) \mu_2^2 + 2 l_1 l_2 m_2 \mu_1 \mu_2 \cos[\theta_1 - \theta_2]}{11^2 l_2^2 m_2 (m_1 + m_2 - m_2 \cos[\theta_1 - \theta_2]^2)}$$

Dibujemos por fin las curvas integrales de los sistemas hamiltonianos y lagrangianos:

- Introducimos los parámetros del sistema

```
In[40]:= {11, 12, m1, m2, g} = {1, 1, 1, 1, 9.8};
```

- Introducimos valores iniciales del sistema Lagrangiano

```
In[40]:= initial = {01[0] == Pi/2, 02[0] == 0, 01'[0] == 0, 02'[0] == 0};  
[número pi]
```

- Resolvemos las Ecuaciones de Euler-Lagrange

```
In[41]:= solL2 = NDSolve[Join[eqsEL, initial], {01, 02}, {t, 0, 10}];  
[resolved...] [junta]
```

- Introducimos los valores iniciales del sistema Hamiltoniano

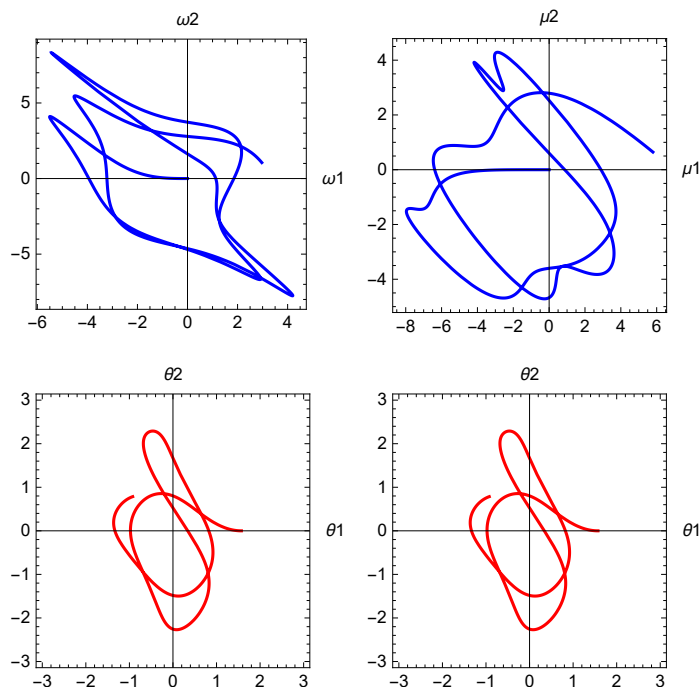
```
In[41]:= initialH = {01[0] == Pi/2, 02[0] == 0, 01[0] == 0, 02[0] == 0};  
[número pi]
```

- Resolvemos las ecuaciones de Hamilton

```
In[42]:= solLH = NDSolve[Join[eqsHam, initialH], {θ1, θ2, μ1, μ2}, {t, 0, 10}];
```

- Representamos las gráficas simultáneamente

```
In[42]:= PlotL1 = ParametricPlot[Evaluate[{θ1[t], θ2[t]} /. solL2],
  {t, 0, 5}, PlotRange → {{-Pi, Pi}, {-Pi, Pi}}, AxesLabel → {θ1, θ2},
  PlotStyle → Red, Frame → True, AspectRatio → 1];
PlotL2 = ParametricPlot[Evaluate[{θ1'[t], θ2'[t]} /. solL2], {t, 0, 5},
  AxesLabel → {ω1, ω2}, PlotStyle → Blue, Frame → True, AspectRatio → 1];
PlotH1 = ParametricPlot[Evaluate[{θ1[t], θ2[t]} /. solLH], {t, 0, 5},
  PlotRange → {{-Pi, Pi}, {-Pi, Pi}}, AxesLabel → {θ1, θ2},
  PlotStyle → Red, Frame → True, AspectRatio → 1];
PlotH2 = ParametricPlot[Evaluate[{μ1[t], μ2[t]} /. solLH], {t, 0, 5},
  AxesLabel → {μ1, μ2}, PlotStyle → Blue, Frame → True, AspectRatio → 1];
GraphicsGrid[{{PlotL2, PlotH2}, {PlotL1, PlotH1}}]
```



Bibliografía

- [Abraham, 1977] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2ª Ed., 1977. Ed. The Benjamin/Cummings Publishing Company.
- [Bazzoni, 2016] G. Bazzoni, V. Muñoz, *Manifolds which are complex and symplectic but not Kähler*, Essays in Mathematics and its Applications, 2016 (pp. 49-69). Ed. Springer, Cham.
- [Borel, 1953] A. Borel, J-P. Serre, *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*, 1953. American Journal of Mathematics. 75 (3), pags. 409–448.
- [Broer, 2009] H. Broer, F. Takens, *Dynamical systems and chaos*, 2010. Ed. Springer Science & Business Media. Disponible en <http://www.math.rug.nl/~broer/pdf/nova.pdf>
- [Cannas, 2001] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry* (Vol. 3575), 2001. Ed. Springer Berlin. Disponible en <https://people.math.ethz.ch/~acannas/Papers/lsg.pdf>.
- [Carathéodory, 1919] C. Carathéodory, *Ueber den Wiederkehrsatz von Poincaré*, 1919. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1919), pags. 580–584.
- [Conlon, 2001] L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, 2ª Ed., 2001. Ed. Birkhäuser.
- [Darboux, 1882] G. Darboux, *Sur le problème de Pfaff*, 1882. Bull. Sci. Math. 6: 14–36, 49–68. Disponible en <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68005v>
- [Dubrovin, 1987] B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, *Geometría Moderna: Métodos de la Teoría de Homologías*, 1987. Ed. MIR Moscú.
- [Fernández, 1988] M. Fernández, M.J. Gotay, A. Gray, *Compact parallelizable four dimensional symplectic and complex manifolds*, 1988. Proceedings of the American Mathematical Society, pags. 1209-1212.
- [Fubini, 1904] G. Fubini, *Sulle metriche definite da una forme Hermitiana*, 1904 Atti Istit. Veneto, 63 (1904) pags. 502–513.
- [Grauert, 2012] H. Grauert, K. Fritzsche, *Several complex variables*, 2012. Ed. Springer Science & Business Media, Vol. 38.
- [Griffiths, 1978] P. Griffiths, H. Joseph, *Principles of algebraic geometry*, 1978. Ed. John Wiley & Sons.
- [Horn, 2012] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix analysis*, 2012. Cambridge university press. Disponible en <http://www.cse.zju.edu.cn/eclass/attachments/2015-10/01-1446086008-145421.pdf>
- [Iñíguez, 1977] J. M. Iñíguez Almech, R. Cid Palacios, *Mecánica Teórica*, tomos I y II, 1965. Ed. Dossat.
- [Kähler, 1933] E. Kähler, *Über eine bemerkenswerte hermitesche metrik*, 1933. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburgo. Springer-Verlag, 9, pags. 173-186.
- [Kobayashi, 1963] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of differential geometry (Vol. 1)*, 1963. Ed. Interscience Publishers.
- [Kobayashi, 1969] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of differential geometry (Vol. 2)*, 1969. Ed. Interscience Publishers.
- [Kodaira, 1964] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces, I*, 1964, American Journal of Mathematics, 86(4), pags. 751-798.
- [Lee, 2003] J.M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2003. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Ed. Springer
- [León, 2017] M. de León Rodríguez, *Una historia breve de la Mecánica Geométrica*, 2017. (Discurso de recepción ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales). Disponible en <http://www.rac.es/ficheros/doc/01237.pdf>.
- [Nelson, 2016] Nelson, Jo. *From Dynamics to Contact and Symplectic Topology and Back*, 2016. arXiv preprint arXiv:1611.02676. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1611.02676>
- [Newlander, 1957] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, 1957. Annals of Mathematics, 65, pags. 391-404
- [Poincaré, 1890] J.H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, 1890. Acta Mathematica, vol. 13, pags. 5-271. Disponible en <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485881725>
- [Saletan, 1971] E. J. Saletan, A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, 1971. Ed. John Wiley & Sons.
- [Taubes, 1994] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, 1994. Mathematical Research Letters, 1(6), pags. 809-822.
- [Thurston, 1976] W.P. Thurston, *Shorter Notes: Some Simple Examples of Symplectic Manifolds*, 1976. Proceedings of the American Mathematical Society, 55(2), pags. 467-468.
- [Study, 1905] E. Study, *Kürzeste Wege im komplexen Gebiet*, 1905. Mathematische Annalen, Vol. 60, pags. 321-378.
- [Warner, 1983] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, 1983. Ed. Springer-Verlag
- [Weinstein, 1977] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*. No. 29, 1977. American Mathematical Soc.
- [Weyl, 1939] H. Weyl, *The classical groups: their invariants and representations*, 1939. Princeton University Press.
- [Wu, 1975] T. Wu, *Boltzmann's H theorem and the Loschmidt and the Zermelo paradoxes*, 1975. International Journal of Theoretical Physics, vol.14 (5), pag. 289.

Glosario

Símbolos

ω -compatible (estructura (casi)compleja). 38
 ε -familia . 8
 k -formas complejas $\Omega^k(M)$. 43
 k -formas exteriores $\Omega^k(V)$, $\Omega^k(V)$. 52, 54
Wolfram Mathematica . 24
1-forma de Lagrange θ_L . 15
1-formas diferenciales $\Lambda^1(M)$. 12
2-forma de Lagrange ω_L . 15

A

acción A . 7, 15
aceleración . 1, 16
aceleración normal . 1
aceleración tangencial . 1
aplicación alternada $A : \mathfrak{T}_k^0(V) \rightarrow \mathfrak{T}_k^0(V)$. 52

C

campo vectorial hamiltoniano X_H . 13
campo vectorial lagrangiano X_E . 15
campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$. 12
canónicas (variables o coordenadas). 9, 12, 33
carta canónica . 12
Cauchy-Riemann (ecuaciones de). 41
cerrada (forma). 56
Christoffel (símbolos de). 10
cinética (energía) T . 3
cohomología de de Rham . 48
cohomología de Dolbeault . 49
conservativa (fuerza). 3
coordenadas generalizadas . 4
cotangente o codiferencial (aplicación). 12
curva integral . 30
curvas integrales base . 18
Cálculo Variacional . 7

D

dependiente del tiempo (campo vectorial). 32
derivada de fibra $FL = TQ \rightarrow T^*Q$. 14
derivada de Lie \mathcal{L}_X . 31, 58
derivada exterior d. 55
descomposición de Hodge . 49
débilmente no degenerada (aplicación bilineal). 25

E

energía E . 14
espacio cotangente . 12
espacio de configuraciones . 7
espacio tangente . 11
espacio vectorial simpléctico (V, ω) . 29

estrictamente plurisubarmónica ($\rho \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, M compleja). 46
estructura casi-compleja J . 40
estructura casi-compleja canónica (variedad compleja). 41
estructura compleja (espacio vectorial). 38
estructura de Fubini-Study en \mathbb{C}^n y $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. 47
Euler-Lagrange (ecuaciones de). 5, 16
exacta (forma). 56

F

fibrado cotangente . 12
fibrado cotangente complejo $T^*M \otimes \mathbb{C}$. 43
fibrado tangente . 12
fibrado tangente complejo $TM \otimes \mathbb{C}$. 42
flow box . 31
flujo . 30
forma de Kähler . 45
formas canónicas θ_0 y ω_0 . 12
formas diferenciales de tipo (l, m) $\Omega^{l,m}(M)$. 43
fuerza . 2

G

geodésica . 10
Geometría Riemanniana . 37
Grassmann (álgebra de), $\Omega(V)$. 54

H

Hamilton (ecuaciones canónicas de). 9, 13
hamiltoniano H . 9, 13
holomorfa (función de variable compleja). 41
holomónicas (restricciones). 4

I

integrable (variedad casi-compleja). 44

L

lagrangiano L . 5, 14
lagrangiano hiperregular . 18

M

masa . 2
momento . 2
momento generalizado . 9
métrica hermítica . 45

N

no degenerada (aplicación bilineal, 2-forma). 25, 29
números de Betti $b^k(M)$. 49
números de Hodge $h^{l,m}(M)$. 49

O

operadores de Dolbeault $\partial, \bar{\partial}$. 43
orientable (variedad). 27
orientación . 27

P

potencial (energía) V . 3
potencial de Kähler . 46
Primera Ley de Newton . 2
producto exterior \wedge . 52
producto interno $\iota_X \omega$. 57
producto tensorial \otimes . 51
proyecciones naturales $\pi_M : TM \rightarrow M$ y $\pi_M^* : T^*M \rightarrow M$. 12
péndulo doble . 20

R

restricciones . 3

S

Segunda Ley de Newton . 2

simpléctica (forma, aplicación). 29
sistema hamiltoniano (M, ω_0, X_H) . 13, 35
submersión . 16

T

tangente o diferencial (aplicación). 12
tensor de Nijenhuis N_F . 44
tensores $\mathfrak{T}_s^r(V)$, $\mathfrak{T}_s^r(M)$. 51, 54
Tercera Ley de Newton . 2
tiempo t . 1
trabajo W . 2
transformada de Legendre FL . 18
traspuesta (aplicación bilineal). 25
triple compatible (ω, g, J) . 40

V

variedad casi-compleja (M, J) . 40
variedad de Kähler . 45
variedad diferenciable compleja . 41
variedad simpléctica (M, ω) . 33
velocidad . 1, 16
volumen (forma de). 27